
THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Spécialité: Rayonnement et plasmas

présentée par

Frantz Martinache

Reconfiguration de pupille pour la haute résolution angulaire

Soutenue le 4 juillet 2005 à l'Observatoire de Haute Provence

devant le jury composé de:

Claude Aime	Rapporteur
Laurent Koechlin	Rapporteur
Antoine Labeyrie	Directeur de thèse
Gérard Lemaître	Examineur
Pierre Slangen	Examineur

Résumé

Le terme de pupille est une notion d'optique géométrique classique qui désigne le lieu par lequel entre la lumière de toutes les sources. On peut toujours, en aval, en reformer une image dans laquelle la lumière de toutes les sources se retrouve uniformément redistribuée, d'où l'appellation de "charnière optique". Cette thèse est consacrée à l'étude des avantages qu'offre une reconfiguration, ne serait ce que temporaire, de la pupille.

Dans le domaine de l'interférométrie optique, une reconfiguration élémentaire de la pupille, appelée densification, permet l'obtention d'images directes au foyer d'un interféromètre et conduit au concept d'hypertélescope. Je montre que cette transformation de la pupille ne détruit aucune information et est au contraire une technique optique de reconstruction des images faisant une utilisation optimale des photons, sans induire de perte de champ.

Dans le domaine de la coronagraphie, une extension de la technique de densification, cette fois ci opérée de façon continue mais hétérogène, permet d'obtenir une pupille apodisée. L'apodisation résultante de cette reconfiguration continue est achromatique et n'induit ni perte de lumière, ni perte de résolution angulaire. Je montre qu'un télescope spatial de 4 mètres de diamètre utilisant cette technique peut confortablement permettre la détection de planètes semblables à notre Terre dans un rayon de 30 pc autour de notre Système Solaire.

Abstract

The pupil is a classical notion of geometric optics that refers to the surface through which the light of all sources may enter an optical instrument. One can always, downstream from the pupil, re-form an image of it. There, the light of all sources is uniformly distributed : it is therefore often nicknamed the "optical pivot". This thesis is devoted to the study of the great advantages that a remapping of the pupil (even a temporary one) offers.

In the field of optical interferometry, an elementary pupil remapping, called densification, allows direct imaging at the focus of a sparse aperture and leads to the concept of hypertelescope. I show that this transformation of the pupil impairs no information and, on the contrary, is an optical technique of image reconstruction, that makes an optimum use of photons and induces no field loss at all.

In the field of coronagraphy, an extension of the pupil densification technique, this time carried out in a continuous but heterogeneous way, allows to obtain an apodized pupil. The apodization resulting from this continuous remapping is achromatic and induces neither light loss nor angular resolution reduction. I show that a 4 metres diameter space telescope using this technique can comfortably make possible the detection of Earth-like planets within 30 pc of the Solar System.

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse Antoine Labeyrie, pour sa confiance aveugle en mon travail ainsi que pour ses idées qui sont en grande partie à l'origine de ce manuscrit. Sa réputation de "bricoleur de lumière" est plus que méritée : il dispose d'un très précieux savoir pratique en optique et est une source d'inspiration intarissable pour ses étudiants.

Je remercie également Deane Peterson, professeur à Stony Brook, New York, qui m'a permis de prendre mon envol pour la première fois en 2001 et m'a offert une première expérience particulièrement enrichissante aux Etats-Unis. Deane est depuis ce temps devenu un ami ainsi qu'un collaborateur précieux, toujours de bon conseil.

Merci infiniment à Olivier Guyon qui est clairement la deuxième grande source d'inspiration de cette thèse. Olivier est un infatigable astronome enthousiaste, talentueux et généreux. J'ai énormément appris de lui lors de mon séjour au télescope Japonais Subaru à Hilo.

Merci à Claude Aime du Laboratoire Universitaire Astronomique de Nice et Laurent Koechlin de l'Observatoire Midi Pyrénées pour avoir accepté la charge de rapporteur de cette thèse. Merci également à mes examinateurs Gérard Lemaître du Laboratoire d'Astrophysique de Marseille et à Pierre Slangen de l'École des Mines d'Alès.

Un grand merci à Christelle Urtado, Alain Bize et Pierre Slangen (encore une fois) de l'École des Mines d'Alès qui m'ont encouragé pendant les années que j'ai passé à l'EMA et grâce à qui j'ai pu orienter ma carrière comme je l'entendais. Merci encore à Rémi Hans pour avoir hébergé un grand bazar encombrant quelques semaines dans son appartement.

Merci à mes collègues et amis de l'équipe LISE : Hervé le Coroller, Olivier Lardière, Julien Dejonghe et Luc Arnold avec qui j'ai mangé, bu, discuté, manipulé, échangé ou même manifesté ... bref, énormément vécu pendant ma thèse !

Merci à Jérôme Schmidt pour les expériences musicales qu'on a partagées et à Sophie Gillet pour avoir non seulement supporté le son de ma guitare électrique dans son appartement mais aussi pour nous avoir merveilleusement inspiré grâce à ses célèbres pâtisseries ratées.

Merci à Marie Sylvander de la Maison Jean Perrin pour l'affection sincère qu'elle témoigne à tous ses "clients". Marie m'a, on peut le dire, véritablement materné tout le temps que j'ai passé à l'OHP et a été d'une aide essentielle dans l'organisation du pot de ma thèse.

Et puis merci à ma famille : ma mère et mes frères bien sûr mais aussi Akiko qui est venue enchanter mon existence entre le début et la fin de cette thèse. Merci enfin à mon vieux Fred, dit "Le Gazier", pour notre fraternelle amitié.

La situation : *Deux amis, au moment du thé de 5 heures.*
Le texte : *“Imagine ...”*

Table des matières

Introduction	i
I Voir des exo-Terres !	1
1 Des planètes extrasolaires	3
1.1 Des planètes habitables	4
1.1.1 Bande d’habitabilité	4
1.1.2 Le système canon	5
1.2 Depuis l’espace	8
1.3 Des cibles potentielles	9
1.4 “Des photons, des photons!”	10
II Reconfiguration de pupille : le paradigme de l’imagerie	11
2 Reconfiguration de pupille pour l’interférométrie	13
2.1 Généralités	13
2.1.1 Pupille : la charnière optique	13
2.1.2 Fonction d’étalement de point (FEP)	14
2.1.3 Relation objet-image	14
2.2 Imagerie en interférométrie optique	15
2.2.1 Interférométrie à 2 télescopes	15
Densification de pupille	15
Mesure de visibilité	16
Mesure de la phase	17
2.2.2 Interférométrie à plus de 2 télescopes	18
2.2.3 Finalement que choisir ?	19
2.3 De l’interféromètre à l’hypertélescope	21
2.3.1 Champ et complexité des sources	23
La notion de champ utile	23
2.4 Les hypertélescopes et l’imagerie grand champ	26
2.4.1 Limite d’encombrement du champ	26

2.4.2	Observation de champs riches	27
2.4.3	En résumé	28
	Relation objet-image en pupille densifiée	29
	Densification-dilution	30
3	Reconfiguration continue de la pupille	33
3.1	Introduction	33
3.2	Le principe du PIAA	34
3.2.1	Pourquoi faire tout ça ?	36
3.2.2	Comparaison avec la pupille densifiée	36
3.2.3	Propriétés des images hors-axe	36
3.2.4	La notion d'échelle focale	39
3.3	Restauration de la pupille	40
3.4	Article PIAAC	41
III	Applications de la reconfiguration de pupille	59
4	Analyse d'onde pour les ouvertures diluées	61
4.1	Gagner de la cohérence	61
4.2	Franges dispersées	63
4.3	Méthode des speckles dispersés	64
4.3.1	Dépendance spectrale des speckles	64
	Pourquoi parler de chromatisme de position ?	66
4.3.2	Généraliser les franges dispersées	67
	Des images monochromatiques	67
4.3.3	Une image dispersée	68
4.3.4	Estimation du bruit de la mesure de la phase	69
4.3.5	Pourquoi pas par paire ?	70
4.3.6	Piston et phase objet	70
4.3.7	Spectre intégral de l'image	73
4.4	Simulations numériques	74
4.4.1	Reconfigurons la pupille !	74
4.4.2	Algorithme Speckles Dispersés	75
4.4.3	Dispersion de la mesure	76
	Signal sur bruit infini	76
	Bruit de photon	79
	Deux régimes de fonctionnement	79
	Cophaser le VLTI ?	81
4.5	Intérêt de l'approche proposée	81
4.6	Toutes les différences de marche	81
4.7	Cophasage et redondance	83
4.7.1	La pupille ... redondante ou pas redondante ?	83

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	11
4.7.2 Speckles dispersés et redondance	83
4.7.3 Détermination des DDMs “symétriques”	85
4.7.4 Cassons gaiement la redondance!	86
Détermination du “pivot”	86
Résolution des DDMs	87
4.7.5 Conclusion sur la redondance	88
4.8 Article speckles dispersés	88
5 Coronographie	95
5.1 Introduction	95
5.2 Le principe hérité de Lyot	97
5.3 Apodisation par contraste de phase	99
5.3.1 Le contraste de phase	100
5.3.2 Apodisation par contraste de phase	101
5.4 Article PIZZA	102
5.5 La grande famille des coronographes	109
5.5.1 Fuites coronographiques	109
5.5.2 Reconfiguration de la pupille et coronographie	111
5.6 Performances d’un exoplanétographe : le PIAAC	112
5.6.1 Introduction	112
5.6.2 Densité de probabilité de présence	112
Le système observé	112
L’instrument	113
5.6.3 Probabilité de détection	114
5.7 Article performances du PIAAC (soumis à ApJ)	116
Conclusion	129
Combinaison de mesures et calcul de rapport signal sur bruit	131

Introduction

La publication scientifique est le résultat d’une opération très mécanique, une recette finalement des plus impersonnelle, le formatage strict des articles laissant en général bien peu de place à une quelconque forme d’originalité ou à un style. De plus, il se trouve que quelle que soit leur nationalité, les chercheurs ont pour obligation afin d’être lus et donc reconnus, de rédiger leurs articles dans un anglais non maîtrisé qu’on a ironiquement fini par baptiser “globish” (contraction de l’expression *global english*).

Dans ce contexte d’uniformité grisâtre, la thèse me paraît comme une rare opportunité de faire une publication qui soit personnelle, à la lecture de laquelle on puisse deviner l’étudiant qui parti de zéro a tenté de se bâtir une vision d’ensemble de son domaine de recherche : écrire une thèse qui ne soit pas une simple compilation d’articles (même si elle les inclut quand même!), voilà l’ambitieux objectif fixé au début de la rédaction de ce travail.

L’idée de cette thèse est de présenter avec un point de vue unificateur quelques techniques de haute résolution angulaire développées dans le but de conduire à l’obtention d’images des planètes qui orbitent autour d’autres étoiles que notre Soleil, en gardant comme objectif les planètes semblables à notre Terre. La technique centrale à laquelle je me suis intéressé, c’est la **reconfiguration de la pupille**. Derrière cette appellation pompeuse se cachent quelques idées très simples qui conduisent à de puissantes applications dans le domaine de la résolution angulaire : pour l’interférométrie optique et la coronographie.

Ce document essaie de présenter une vue d’ensemble de ces techniques après un peu moins de trois années de travail dans ce domaine. Ces trois années, je les ai partagées entre l’équipe LISE dirigée par Antoine Labeyrie à l’Observatoire de Haute Provence et l’équipe du projet PIAA d’Olivier Guyon dans les bureaux du télescope national Japonais Subaru à Hawaii.

J’ai rejoint l’équipe LISE quelques années après la naissance du concept de l’hypertélescope [Labeyrie 1996] et ai commencé par “me coller” à la question du cophasage en contribuant au développement d’une méthode, suggérée par Antoine Labeyrie dans [Lardière *et al.* 2002], comme une extension du suiveur de franges dispersés de [Koechlin *et al.* 1996] et finalement baptisée “des speckles dispersés” [Martinache 2004a] et [Borkowski *et al.* 2005].

Toutefois, rapidement attiré par les promesses de la coronographie stellaire pour l’imagerie des exoplanètes, je me suis intéressé à une possible méthode d’apodisation sans perte de

lumière pour la coronographie inspirée du contraste de phase de Zernike appelée PIZZA [Martinache 2004b], [Martinache 2004c]. J’ai dans le même temps, contribué à l’élaboration de la deuxième génération de l’encyclopédie des planètes extrasolaires de [Schneider 1995] en mettant au point le prototype du site internet et de la base de données des exoplanètes. La nouvelle encyclopédie, dont le prototype a été présenté lors de la semaine de la SF2A en juin 2004 [Martinache & Schneider 2004] est accessible en ligne depuis le premier juin 2005.

Dans la continuité du travail sur l’apodisation, j’ai eu le privilège de pouvoir intégrer durant sept mois l’équipe PIAA [Guyon 2003] et de contribuer au développement de cet astucieux concept [Guyon *et al.* 2005], [Martinache *et al.* 2005] qui me paraît maintenant être la meilleure option pour permettre l’imagerie directe des exoplanètes avec un télescope spatial.

Enfin de retour au LISE, au moment de discussions pour les choix de l’instrumentation de deuxième génération de l’interféromètre VLTI de l’ESO, je me suis “remis” aux hypertélescopes avec comme objectif de redémontrer l’intérêt de l’approche imagerie directe pour l’interférométrie. Le résultat de ces réflexions menées avec Olivier Lardière et présenté sous forme d’un cours sur la pupille densifiée lors de la troisième édition de l’école ITHD [Martinache 2005] fait l’objet du chapitre 2.

Il ne me reste maintenant plus qu’à vous souhaiter bonne lecture ...

Première partie
Voir des exo-Terres !

Chapitre 1

Des planètes extrasolaires

2005 : cette année, l’Observatoire de Haute Provence célèbre le dixième anniversaire de la découverte par [Mayor & Queloz 1995] de *51 Pegasi b*, la première planète orbitant autour d’une étoile autre que notre Soleil, dont la présence a été révélée par vélocimétrie radiale. Cette découverte de 1995 était totalement inattendue : il semblait en effet auparavant impossible d’envisager la présence d’une planète d’une demi masse de Jupiter orbitant en à peine plus de quatre jours autour de son étoile.

Cette découverte s’est, au cours des années vue, confortée par d’autres observations du même type conduisant à la création d’une nouvelle classe de planètes, appelées “Pégasides” ou “Jupiter chauds”. Grâce à la patiente accumulation de plusieurs années d’observations systématiques, les astronomes continuent de mettre en évidence l’existence de planètes aux signatures de plus en plus discrètes, avec des périodes de plus en plus longues.

On a également pu observer le passage d’une planète devant son étoile. Ce phénomène, *a priori* statistiquement rare appelé transit photométrique, a été observé pour la première fois par [Henry *et al.* 1999] pour le système *HD 209458 b*. On peut s’attendre à une moisson de découvertes de ce genre après le lancement du satellite Corot [Schneider 1995] qui sera consacré à cette mission.

Quoi qu’il en soit, à l’époque de la rédaction de cette thèse, ce sont déjà un peu plus de 150 planètes qui ont été découvertes de façon indirecte, orbitant autour d’environ 130 étoiles [Schneider 1995], [Martinache & Schneider 2004].

L’observation directe des planètes extrasolaires ne sera possible que lorsque des instruments répondant à de très sévères critères de sélection seront disponibles. De tels instruments devront en effet disposer d’une résolution angulaire suffisante (quelques millisecondes d’arc dans le cas des Pégasides) pour être capable de séparer *sur le ciel* l’étoile de son compagnon tout en sachant artificiellement atténuer la lumière stellaire d’un facteur situé entre le million et le milliard pour voir la faible lueur du compagnon.

Ce petit chapitre d’introduction a pour but de donner une idée des contraintes liées à la détection par imagerie directe d’une classe particulière de planètes à l’existence encore hypothétique : les exoplanètes de type terrestre, susceptibles d’abriter la vie.

1.1 Des planètes habitables

La condition nécessaire à l'apparition de la vie telle que nous la connaissons sur Terre est la présence d'eau liquide. Bien entendu, rien n'interdit d'envisager d'autres modes de développement du vivant mais cette discussion dépasse largement le cadre de cette thèse.

On va donc appeler *bande d'habitabilité* la région autour d'une étoile dans laquelle la présence d'eau sous forme liquide est possible. La position et l'étendue de cette région sont essentiellement fonction de la température effective de l'étoile ainsi que de la composition chimique de l'atmosphère des planètes. Si on veut, d'après nos hypothèses simples, pouvoir détecter la vie autour d'autres étoiles que notre Soleil, il faut que les instruments que l'on envisage d'utiliser permettent d'observer confortablement dans cette bande d'habitabilité.

1.1.1 Bande d'habitabilité

On considère que les planètes auxquelles on s'intéresse sont en équilibre avec leur environnement : chaque planète doit par conséquent rayonner l'exacte quantité d'énergie qu'elle tire de l'éclairement solaire pour ne pas voir varier sa température. On détermine l'étendue de cette bande en faisant l'hypothèse que la planète de rayon R_P est un corps noir, dont la luminosité est proportionnelle à la puissance quatrième de sa température T_P :

$$L_P = 4\pi R_P^2 \sigma T_P^4. \quad (1.1)$$

Pour être à l'équilibre, cette luminosité doit être égale à l'énergie lumineuse de l'étoile interceptée par la planète :

$$E = \pi R_P^2 \frac{L_*}{4\pi D^2}, \quad (1.2)$$

où L_* est la luminosité de l'étoile, elle aussi considérée comme un corps noir et D le rayon de l'orbite planétaire (on se limite au cas des orbites circulaires). On voit alors que le rayon orbital pour laquelle la température vaut T_P est proportionnel à $1/T_P^2$:

$$D = \frac{R_*}{2} \left(\frac{T_*}{T_P} \right)^2. \quad (1.3)$$

Dans le cas de notre Soleil, $R_* = 700000 \text{ km}$ et $T_* = 5700 \text{ K}$. Les limites de la bande d'habitabilité imposées par ce simple modèle sont alors :

$$\begin{aligned} R_i &= 81 \times 10^6 \text{ km} \text{ (limite intérieure)} \\ R_e &= 152 \times 10^6 \text{ km}, \text{ (limite extérieure)} \end{aligned}$$

Nous n'avons cependant pas pris en compte la présence d'une atmosphère, dont la composition va venir élargir sensiblement l'étendue de la zone habitable. Deux effets entrent en considération : l'existence d'un effet de serre et l'albédo.

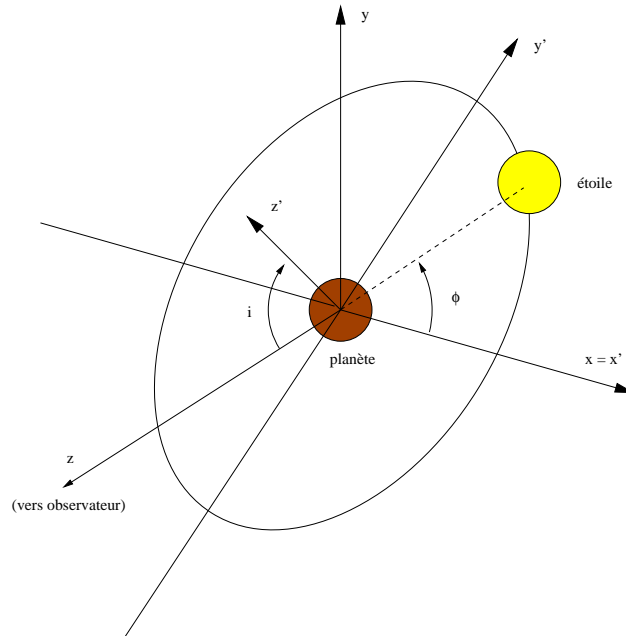


FIG. 1.1 – Système de référence utilisé. $i = 0$ correspond au cas d'un système qui serait vu par la tranche. Lorsque $\Phi = 0$, l'étoile et la planète sont dans un plan perpendiculaire à l'axe de visée, la planète étant éclairée par la droite.

- La longueur d'onde du pic d'émission d'un corps noir à environ 300 K est proche de $10\ \mu\text{m}$ (loi de Wien). Dans ce domaine de longueur d'onde, qui correspond au proche infrarouge, la vapeur d'eau et le dioxyde de carbone sont opaques et la planète ne peut donc plus être considérée comme un corps noir idéal. Un terme correcteur (corps gris) doit être pris en compte : l'effet de serre permet de repousser la limite externe de la bande d'habitabilité un peu plus loin du Soleil.
- A l'opposé, une certaine fraction de l'énergie solaire est réfléchiée par l'atmosphère ou par le sol et n'est par conséquent pas absorbée par la planète : on appelle albédo la fraction de la lumière réfléchiée. C'est *a priori* une grandeur chromatique. L'albédo de la Terre dans le domaine du visible est de $a = 0.37$. Il est situé entre celui de la Lune qui n'a pas d'atmosphère ($a = 0.12$) et celui de Vénus dont l'atmosphère très dense réfléchit près de 2 fois plus ($a = 0.65$). L'albédo est une donnée qui rapproche la limite intérieure de la bande d'habitabilité vers le Soleil.

1.1.2 Le système canon

La détection et l'imagerie de planètes terrestres exige une forte spécialisation de l'instrument dédié à cette tâche : il convient donc de définir quelle en sera est la cible typique ... si tant est que de telles planètes existent autour d'autres étoiles que notre Soleil!

Le "canon" qui a été retenu est tout simplement une copie du système Terre-Soleil,

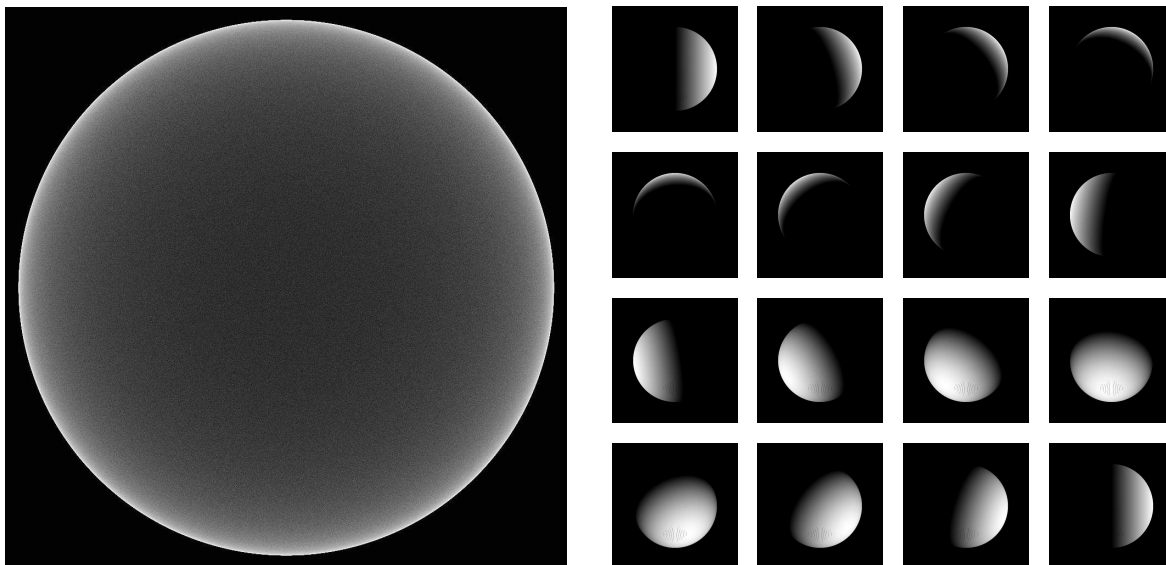


FIG. 1.2 – A gauche : densité de probabilité de présence “sur le ciel” d’un éventuel compagnon en orbite circulaire autour d’une étoile qui serait située au centre de la figure. Cette densité montre que la configuration d’une planète à élongation maximale est la plus probable. A droite : Phases d’une planète appartenant à un système avec une inclinaison $i = 45^\circ$. L’azimut Φ évolue dans le sens normal de lecture de $\Phi = 0^\circ$ à $\Phi = 340^\circ$. La planète est modélisée par un diffuseur isotrope (Lambertien).

idéalement situé à une distance de $10 pc$. La séparation angulaire entre la planète et l’étoile à élongation maximale serait dans ce cas de $0.1''$ d’arc.

Dans le domaine du visible, l’émission propre d’une planète est négligeable devant la réflexion par l’effet d’albédo. Un modèle de diffuseur isotrope (modèle de Lambert) convient pour modéliser la fraction d’énergie diffusée dans la direction de l’observateur.

Appelons γ l’angle de phase, *i.e.* l’angle entre le vecteur rayon étoile-planète et la direction de l’observateur. La réflectivité de la planète évolue selon la loi :

$$r(\gamma) = C \frac{1}{2} \left(1 + \cos(\gamma) \right). \quad (1.4)$$

où C est une constante qui reste à déterminer. En fait, cette réflectivité intégrée suivant γ doit être égale à l’énergie lumineuse totale interceptée par la planète, à l’albédo près. Cette intégration contraint alors la valeur du contraste en phase pleine :

$$C_{FP} = \frac{2}{a} \left(\frac{D}{R} \right)^2, \quad (1.5)$$

avec D la valeur du rayon orbital et R , celui de la planète et a son albédo. Pour notre planète Terre, $a = 0.37$, $R = 6400 km$ et $D = 1 UA$ donnent un contraste Soleil/Terre en phase pleine $C_{FP} = 3 \times 10^9$.

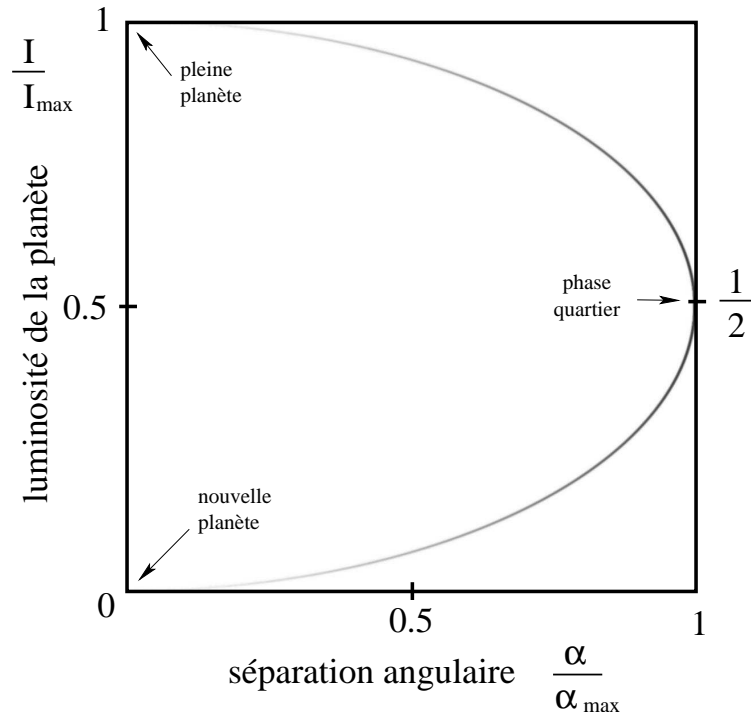


FIG. 1.3 – Densité de probabilité de présence dans le plan séparation angulaire - contraste étoile/planète (la densité est codée linéairement en niveaux de gris). La configuration la plus probable est lorsque le système est à élongation maximale : le contraste est alors le double de celui en phase pleine.

Cependant, ce contraste peut *a priori* prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et le contraste en phase pleine. Aussi, pour évaluer les performances réelles d'un système de d'imagerie directe d'exoplanètes, il est essentiel de construire une description statistique des caractéristiques de contraste et de séparation angulaire.

La figure 1.1 présente le système de coordonnées utilisé dans ce but. Pour un orbite circulaire, la densité de probabilité de présence d'une planète est uniforme le long de cette orbite. Cependant, la densité de probabilité de l'inclinaison i du système est elle proportionnelle au sinus de cette inclinaison, à cause de la possible rotation du système de référence autour de l'axe dirigé vers l'observateur.

Pour toutes les valeurs de Φ et i , on calcule la séparation angulaire :

$$\alpha = \alpha_m \times \sqrt{\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \cos^2 i}, \quad (1.6)$$

où α_m est la séparation angulaire à élongation maximale. Pour un système dont on estime la séparation angulaire à élongation maximale du compagnon, on peut alors construire la fonction de densité de probabilité de séparation angulaire entre l'étoile et son compagnon. Cette fonction est représentée, projetée sur le ciel sur la figure 1.2.

A chaque valeur de α , correspondent 2 angles de phase γ possibles (un en avant du système et l'autre en arrière :

$$\gamma = \arcsin \alpha/\alpha_m \text{ pour } 0 < \Phi < \pi \quad (1.7)$$

$$= \pi - \arcsin \alpha/\alpha_m \text{ pour } \pi < \Phi < 2\pi, \quad (1.8)$$

qui sont équiprobables, vu que leur choix ne dépend que de la valeur de Φ qui est uniformément distribué de 0 à 2π .

Combinant toutes ces informations, on peut alors construire la densité de probabilité de présence d'un compagnon dans le plan séparation angulaire - contraste étoile/planète, représenté sur la figure 1.3. On utilisera cette donnée un peu plus tard (chapitre 5) comme point de départ pour évaluer les performances d'un système coronographique.

1.2 Depuis l'espace

Un "exoplanétographe", *i.e.* un instrument capable de fournir des images des exoplanètes doit, on l'a déjà mentionné, nécessairement disposer d'une bonne résolution angulaire et permettre l'accès à une très grande dynamique de mesure. Le modèle de diffusion simple proposé donne un contraste dans le visible de l'ordre de $C = 10^{10}$. Dans l'infra rouge, la situation est *a priori* plus avantageuse avec un contraste de $C = 10^6$ à $10 \mu m$. La perte de résolution implique toutefois d'augmenter la base à quelques dizaines de mètres. Il faut alors plutôt s'orienter vers un interféromètre ou un télescope à pupille segmentée.

Depuis le sol, la présence d'une atmosphère perturbe énormément la dynamique et fait très rapidement chuter le contraste accessible. De fait, on envisage très difficilement de voir ces planètes autrement que depuis l'espace.

Les États Unis et l'Europe ont mis au point deux programmes scientifiques concurrents partageant cet objectif. La mission *Darwin* de l'ESA a pris l'orientation interféromètre frange noire IR alors que la NASA garde ses options et décline son programme TPF *Terrestrial Planet Finder* en TPF-C avec un télescope monopupille visible de qualité coronographique et TPF-I avec un interféromètre IR.

Ainsi, même si les choix technologiques sont différents, les objectifs sont, dans l'ordre chronologique de déroulement de la mission :

- Détection d'éventuels compagnons faibles autour d'étoiles proches par imagerie directe [Martinache *et al.* 2005].
- Caractérisation spectroscopique (basse résolution) des meilleurs candidats détectés lors de la première phase de la mission, pour y détecter la vie [Arnold *et al.* 2002]?
- Suivi astrométrique des compagnons pour caractérisation de l'orbite.
- Suivi spectroscopique pour l'étude des variations diurnes et saisonnières du spectre des planètes.

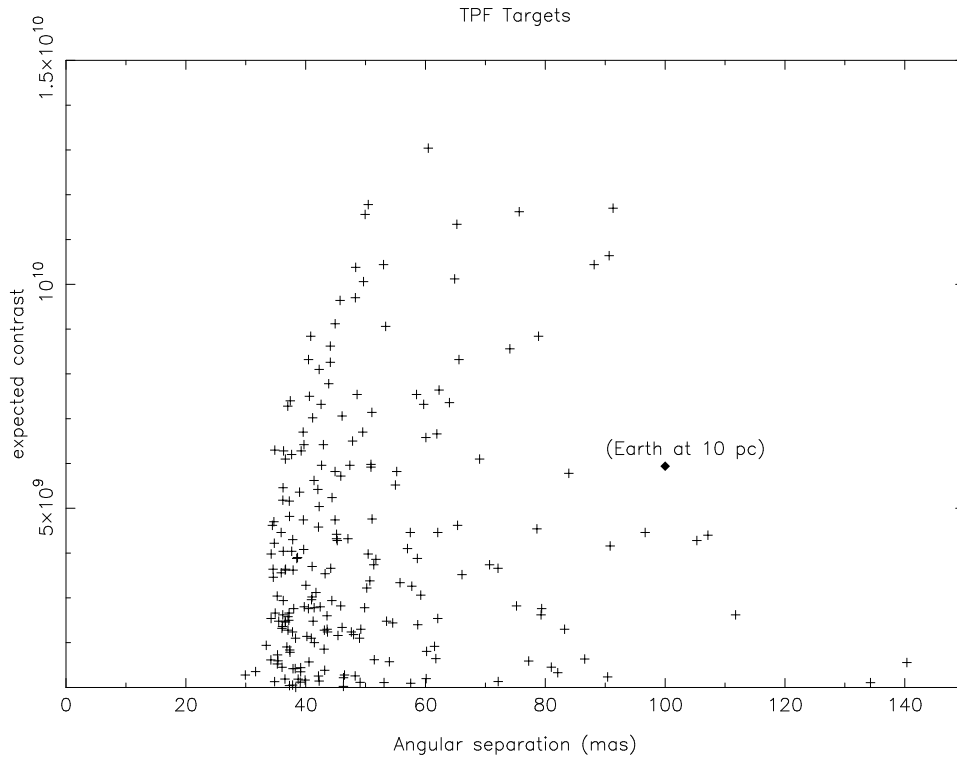


FIG. 1.4 – Distribution du contraste et de la séparation angulaire attendus pour des planètes de type Terrestre, toutes situées à la limite intérieure de la bande d’habitabilité autour des étoiles cibles de la mission TPF.

1.3 Des cibles potentielles

Afin d’anticiper les performances de la mission TPF-C, une liste de cibles potentielles a été établie par [Ebbets *et al.* 2003]. Cette liste est d’ailleurs disponible au téléchargement à l’adresse suivante :

<http://planetquest.jpl.nasa.gov/Navigator/library/basdtp.pdf>.

Cette liste a été établie en sélectionnant dans le catalogue Hipparcos et dans un rayon de $30 pc$ autour de notre système, les étoiles de la séquence principale qui ne sont ni des binaires, ni des variables et dont l’indice de couleur $B - V$ est positif. En effet, une forte émission UV et une courte durée de vie de l’étoile sont peu compatibles avec l’existence d’un système planétaire.

La figure 1.4 présente les caractéristiques des éventuelles planètes dont l’orbite serait confondue avec la limite intérieure de la zone habitable : séparation angulaire et contraste étoile/planète à élongation maximale. On peut constater à l’examen de ces données que le système canon généralement invoqué d’un couple Terre-Soleil placé à $10 pc$ n’est pas le plus représentatif de cette distribution. Difficile de tirer des conclusions définitives de ce constat. En effet, ces données sont basées sur une simple extrapolation des connaissances de notre seul

système planétaire : cette extrapolation est plutôt audacieuse : la découverte de la première exoplanète 51 *Pegasi* fût à cet égard une bonne leçon puisqu'on avait découvert une géante gazeuse là où il était auparavant impensable d'en trouver. Les planètes que permettra de découvrir la mission TPF contiendront vraisemblablement elles aussi leur lot de surprises.

1.4 “Des photons, des photons !”

Des contrastes proches de 10^{10} sont tels qu'il est important de se mettre quelques ordres de grandeur en tête, concernant le nombre de photons qu'on espère récolter de ces planètes. Le flux, dans le domaine visible, en Jansky d'une étoile de magnitude $V = 0$ est une donnée des tables :

$$F_{V=0} = 3530 \text{ Jy} = 3530 \times 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \quad (1.9)$$

Pour une étoile de magnitude V , on corrige ce flux grâce à la relation suivante :

$$F_V = F_{V=0} \times 10^{-V/2.5} \quad (1.10)$$

Ainsi, le nombre de photons par seconde émis par une étoile de magnitude V , collecté par un télescope de surface S dans la bande spectrale $\Delta\lambda$ est donné par :

$$n = \frac{F_V \times S}{h} \times \frac{\lambda \Delta\lambda}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (1.11)$$

$$\approx \frac{F_V \times S}{h R} \quad (1.12)$$

où h représente la constante de Planck et $R = \lambda/\Delta\lambda$ la résolution spectrale. Une application numérique est à retenir : dans une bande spectrale de $\pm 0.1 \mu\text{m}$ autour de $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, soit $R = 2.5$, un télescope de surface collectrice 1 m^2 reçoit 2×10^{10} photons par seconde d'observation d'une étoile de magnitude $V = 0$.

Si on reprend le cas du système canon Terre-Soleil à 10 pc , avec une magnitude apparente du Soleil $V = 5$ et dans la configuration la plus probable, un contraste Soleil/Terre $C = 6 \times 10^9$ qui correspond à un peu plus de 24 magnitudes, on réalise qu'un mètre carré de surface collectrice reçoit seulement 0.03 photons planète par seconde !

Deuxième partie

Reconfiguration de pupille : le paradigme de l'imagerie

Chapitre 2

Reconfiguration de pupille pour l'interférométrie

Cette partie de la thèse s'intéresse de façon générale à la technique optique de reconfiguration de la pupille pour l'imagerie à haute résolution angulaire. On rappelle ici tout d'abord un certain nombre de notions nécessaires à la compréhension du texte, sur la formation des images en optique diffractive et introduit le lecteur à l'idée de reconfiguration de pupille de façon générale. Deux cas d'utilisation de la technique de reconfiguration de pupille sont étudiés en détail le premier pour l'interférométrie et le second pour la coronographie des télescopes monopupilles.

2.1 Généralités

Je recommande chaudement la lecture de ces ouvrages de référence qui introduisent et justifient l'utilisation du formalisme de Fourier qui est essentiel dans la description de nombreux phénomènes de diffraction : [Goodman 1996], [Perez 2000]. Deux notions sont cependant essentielles à une bonne compréhension du texte de cette thèse : la notion de pupille et la relation de Fourier qui relie la distribution d'amplitude complexe dans la pupille et dans l'image.

2.1.1 Pupille : la charnière optique

La pupille est une notion d'optique géométrique simple. On peut parler de façon un peu imagée d'un faisceau lumineux comme ayant 2 extrémités, l'une étant la pupille et l'autre étant l'image. La pupille d'entrée d'un instrument est le lieu géométrique par lequel entre la lumière de toutes les sources.

On peut *a priori* reformer n'importe où en aval une image de la pupille où la lumière de toutes les sources se retrouve entièrement redistribuée, d'où l'appellation de "charnière optique". L'objet de cette thèse est de faire un bilan des avantages qu'il y a à venir reconfigurer, ne serait ce que de façon temporaire, cette pupille pour produire des effets adaptés à

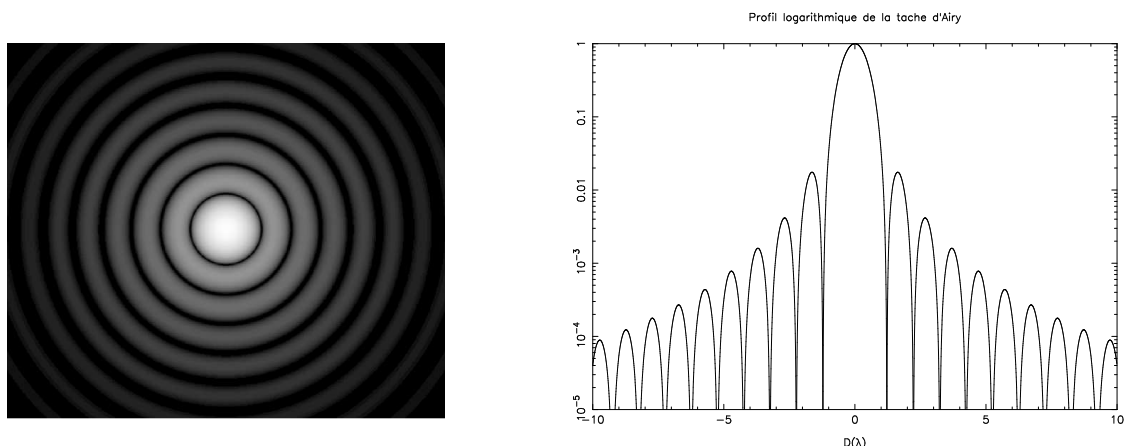


FIG. 2.1 – Tache d'Airy, résultat de la diffraction par une ouverture circulaire.

différents besoins, notamment celui de faire de la coronagraphie.

2.1.2 Fonction d'étalement de point (FEP)

On appelle FEP l'image d'un point source faite par un instrument optique. Dans le cadre d'étude de cette thèse, le formalisme de Fourier offre une description suffisante du phénomène de diffraction. La FEP s'exprime comme étant le module carré de la transformée de Fourier de distribution d'amplitude complexe A dans la pupille :

$$FEP(x, y) = \left| \iint_{pup} A(u, v) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ux+vy)} du dv \right|^2. \quad (2.1)$$

NB : les détecteurs optiques (cellules tapissant la rétine dans l'oeil, grains d'argent d'une pellicule photo ou capteurs CCD d'une caméra ne sont sensibles qu'à l'intensité du champ électrique et non à son amplitude. On ne peut du coup qu'enregistrer le module carré de cette transformée de Fourier, perdant par là même l'information sur la phase de l'onde.

La figure 2.1 présente le calcul classique de diffraction au foyer d'une lentille circulaire, conduisant à l'obtention d'une figure d'Airy.

2.1.3 Relation objet-image

Si la réponse de l'instrument est indépendante de la position de l'objet dans le champ d'observation, la FEP est dite invariante par translation. Le domaine du champ pour lequel cette relation est vérifiée est appelé champ d'isoplanétisme. L'image I d'un objet O peut alors être calculée comme le résultat d'une simple opération de convolution entre la fonction décrivant l'objet et la FEP de l'instrument :

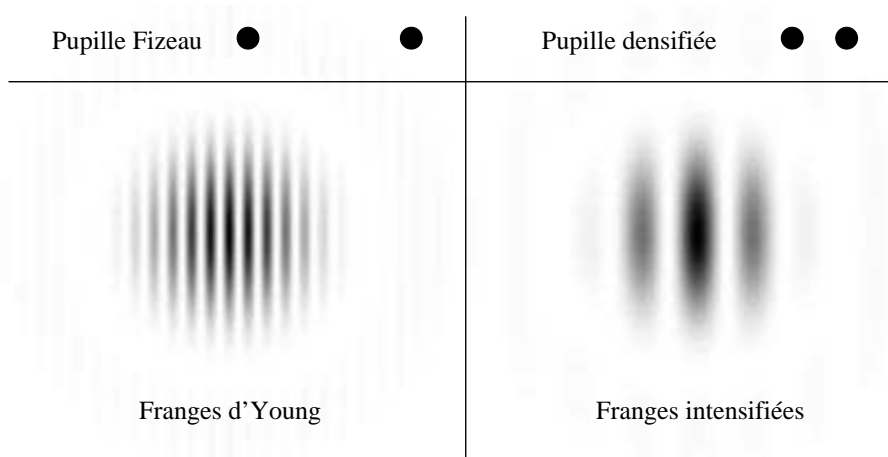


FIG. 2.2 – Intensification des franges d’interférence dû à la densification de la pupille, ici par rapprochement des sous ouvertures : les franges moins nombreuses avec une pupille densifiée sont, en gardant le même nombre de pixels par frange, rendues plus facilement détectables.

$$I(x, y) = O(x, y) \otimes FEP(x, y). \quad (2.2)$$

NB : Cette notion est d’autant plus importante qu’on va s’intéresser un peu plus loin à des systèmes optiques pour lesquels cette relation ne se vérifie que sur un tout petit champ.

2.2 Imagerie en interférométrie optique

Ce paragraphe parle de la première application de la technique de reconfiguration de pupille : la densification de pupille. Utilisée dès le départ par Michelson, cette technique a été généralisée par Labeyrie pour conduire au concept d’hypertélescope, qui permet de repenser l’interféromètre comme un système imageur direct. Il me paraît intéressant ici de resituer les 2 grandes approches de l’imagerie par un interféromètre : imagerie directe et synthèse d’ouverture pour mieux en apprécier les caractéristiques communes comme les différences.

2.2.1 Interférométrie à 2 télescopes

Densification de pupille

La densification de pupille est une invention dont on peut dire qu’elle a été faite “par la force des choses”. Albert Michelson ne se contentant pas de la résolution angulaire que lui offrait le télescope de 100” du Mont Wilson [Michelson & Pease 1921], y a installé une poutre portant 2 bras périscopiques grâce auxquels il peut recombinaison 2 ouvertures séparées de 6 mètres. En cherchant à gagner de la résolution angulaire, l’utilisation des périscopes a accidentellement rendu les franges moins nombreuses et donc plus brillantes ! La figure 2.2 montre l’effet sur les franges du rapprochement des sous pupilles.

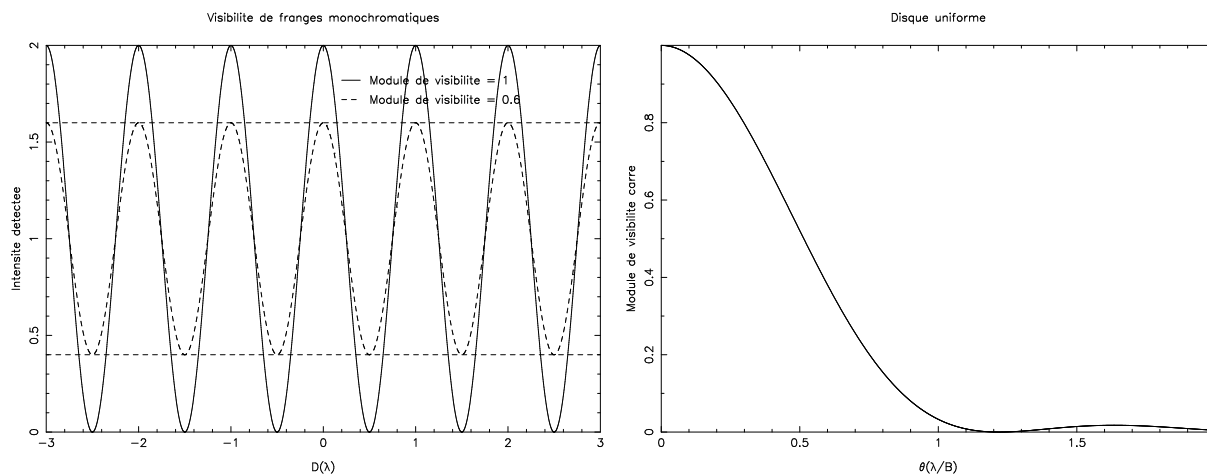


FIG. 2.3 – A gauche : Franges d’interférence de différentes visibilités. A droite : Courbe de visibilité normalisée théorique d’une source modélisée par un disque uniforme résolu.

On peut voir l’opération de densification de deux façons qui sont au final, strictement équivalentes : soit on rapproche les sous pupilles sans modifier leur taille, ce que font les périscopes de Michelson, soit on agrandit les sous pupilles d’un même facteur sans modifier la distance qui sépare leurs centres.

Dans les 2 cas, on conserve le même pouvoir résolvant qui n’est fonction que de la séparation des télescopes à l’entrée de l’interféromètre. La densification permet de changer la répartition de l’énergie lumineuse au moment de la recombinaison et rend plus aisée la mesure de visibilité.

NB : Si l’on disposait de détecteurs idéaux, i.e. composés d’une infinité de pixels, avec une efficacité quantique de 100 % et qui soient sans bruit, l’intensification des franges induite par la densification n’apporterait aucun gain. Nous verrons cependant que ce n’est pas le seul avantage qu’apporte cette technique.

Mesure de visibilité

Si on observe avec un tel interféromètre une source lumineuse non résolue et placée sur l’axe, les franges qu’on enregistre sont centrées sur le détecteur et parfaitement bien contrastées. Par cela, j’entends que les franges sombres sont parfaitement noires (au fond de ciel près). L’observation de tels objets reste cependant peu intéressante : au mieux permet elle d’en borner le diamètre angulaire, forcément inférieur au pouvoir de résolution de l’interféromètre. C’était d’ailleurs la conclusion de Stéphan après ses observations en masquant le télescope de 80 cm de l’Observatoire de Marseille, bornant le diamètre des étoiles qu’il a observées à 0.16'' d’arc.

L’observation d’une source étendue se traduit par l’enregistrement de franges moins contrastées, comme celles présentées sur la figure 2.3. On peut définir ce contraste, qu’on

appelle facteur de visibilité des franges :

$$V = |\gamma| = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (2.3)$$

La relation entre le facteur de visibilité et la distribution d'intensité de l'objet est donnée par le théorème de Van Cittert et Zernike. Ce théorème dit que pour une source incohérente, et sur un petit champ, le facteur de visibilité des franges V est égal au module de γ , la transformée de Fourier de la distribution d'intensité normalisée de l'objet :

$$\gamma(u, v) = \int I(\alpha, \beta) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha u + \beta v)} d\alpha d\beta. \quad (2.4)$$

La transformée de Fourier étant inversible, on peut à partir d'une collection de mesures de visibilités, déterminer la distribution d'intensité de la source étudiée telle qu'elle est vue par l'interféromètre, c'est à dire, en construire une image. Cette dernière sera bien entendu d'autant mieux déterminée qu'on disposera de nombreuses mesures de visibilités pour différentes fréquences spatiales, ce qu'on appelle couramment la qualité de la couverture du plan (u, v) . La dernière étape pour retrouver la distribution d'intensité de l'objet consiste à déconvoluer cette image reconstruite par la FEP de l'interféromètre.

Les interféromètres optiques actuels comportent peu d'ouvertures et de ce fait couvrent une très faible partie du plan (u, v) . Dans ces conditions, la stratégie retenue consiste plutôt à contraindre un modèle relativement simple de l'objet étudié comme un disque uniforme (*c.f.* figure 2.3) ou une loi d'assombrissement centre-bord avec les mesures de visibilité. L'obtention d'une image est alors la résolution d'un problème inverse. On se retrouve alors bien loin de l'idée qu'on se fait d'un système imageur.

Mesure de la phase

La visibilité est *a priori* (*c.f.* éq. 2.4) un nombre complexe dont le module est proportionnel au contraste des franges tel qu'il vient d'être défini et la phase dépend de la position des franges par rapport à une référence. La phase renseigne donc en quelque sorte sur le caractère asymétrique de l'objet.

Malheureusement, la présence de l'atmosphère rajoute au terme de phase propre à l'objet observé un terme de phase atmosphérique aléatoire qui rend cette information le plus clair du temps inutilisable. L'utilisation du module de visibilité seul ne permet *a priori* de reconstruire que l'autocorrélation de l'objet. En effet, si :

$$|\gamma|^2 = |\mathcal{F}(OBJ) \times \mathcal{F}(FEP)|^2, \quad (2.5)$$

où OBJ représente la distribution de brillance de l'objet, FEP la fonction d'étalement de point et \mathcal{F} la transformée de Fourier. Par transformée de Fourier inverse, on n'accède qu'à l'autocorrélation de l'objet :

$$\mathcal{F}^{-1}(|\gamma|^2) = \mathcal{F}^{-1}(|\mathcal{F}(OBJ)|^2) \otimes \mathcal{F}^{-1}(|\mathcal{F}(FEP)|^2) \quad (2.6)$$

$$= \mathcal{A}(OBJ) \otimes \mathcal{A}(FEP), \quad (2.7)$$

où \mathcal{A} représente l'autocorrélation. On se retrouve dans le cas de figure de l'interférométrie des tavelures [Labeyrie 1970]. La stratégie actuellement mise en oeuvre pour recouvrer une partie de l'information de phase est l'observation simultanée suivant plusieurs bases interférométriques qui fait l'objet du paragraphe suivant.

2.2.2 Interférométrie à plus de 2 télescopes

La phase représente 50 % de l'information est donc une donnée essentielle à la reconstruction d'images. L'information *a priori* perdue à cause des fluctuations atmosphériques peut cependant être partiellement retrouvée, à condition de faire des observations simultanées de la phase des franges pour 3 bases ou plus, en utilisant un nouvel observable, hérité de l'interférométrie radio : la clôture de phase [Baldwin *et al.* 1986].

Appelons (1), (2) et (3) trois des ouvertures de l'interféromètre considéré. La phase des franges enregistrées pour chacune des bases peut être décomposée comme une somme de 2 termes : un terme de phase intrinsèque, propre aux caractéristiques de l'objet étudié et un terme de phase induit par l'atmosphère au dessus de chaque télescope :

$$\begin{array}{rclcl} \phi(1-2) & = & \phi_0(1-2) & + & [\phi(2) - \phi(1)] \\ \phi(2-3) & = & \phi_0(2-3) & + & [\phi(3) - \phi(2)] \\ \phi(3-1) & = & \phi_0(3-1) & + & [\phi(1) - \phi(3)] \\ \text{phase enregistrée} & & \text{phase intrinsèque} & + & \text{atmosphère.} \end{array}$$

On appelle clôture de phase la somme de ces 3 phases. La qualité essentielle de ce nouvel observable est d'être indépendante des fluctuations atmosphériques (la somme des termes correspondant s'annule). Pour un interféromètre constitué de n ouvertures, on dispose d'autant de clôtures de phase qu'on peut former de triangles indépendants dans la pupille, soit $C_{n-1}^2 = (n-1) * (n-2)/2$. Ces clôtures sont autant d'observables supplémentaires qu'on utilise dans des algorithmes de reconstruction d'image, en plus des modules de visibilité.

L'information de phase n'est cependant que partiellement recouverte : C_{n-1}^2 clôtures pour C_n^2 inconnues qui sont les phases de chaque système de franges. On peut noter que la fraction d'information recouverte, croissant comme $1 - \frac{2}{n}$, est d'autant meilleure que le nombre d'ouvertures est important : 33 % pour 3 ouvertures mais 80 % pour 10. Cependant, la complexité induite par l'enregistrement simultané de C_n^2 systèmes de franges d'interférence (soit 45 pour un réseau de 10 ouvertures) est telle qu'il est légitime de se demander si cette approche ne peut être remplacée par quelque chose de plus simple.

On peut également noter que les récentes propositions d'instruments imageurs comme [Vitruv 2005] (synthèse d'ouverture) ou [VIDA 2002] (imagerie directe), faites pour l'interféromètre VLTI à Paranal ont des réquisits très comparables en terme de cophasage (mieux que $\lambda/10$). Dans ces conditions, les 2 approches deviennent strictement équivalentes : accès direct aux visibilité complexes dans le cas de la synthèse d'ouverture, la clôture de phase devenant alors un "raffinement" et image directe dans l'autre cas. Le lien entre les 2 est encore une fois une simple transformée de Fourier (*c.f.* equation 2.4).

2.2.3 Finalement que choisir ?

La figure 2.4 établit une comparaison intéressante des développements des techniques d'optique adaptative pour les télescopes monopupille d'un côté et pour l'interférométrie de l'autre. On établit l'équivalence entre le passage de l'imagerie speckle à l'imagerie longue pose avec optique adaptative d'un côté et le passage de l'interférométrie cohérencée (incluant les techniques comme la clôture de phase) à l'imagerie directe longue pose avec cophasage de l'autre côté. On peut donc attendre un fort gain au niveau de la dynamique des images, directes et reconstruites. La différence qui joue en faveur de l'imagerie directe en interférométrie cophasée est la possibilité unique de faire de la coronographie.

Quoi qu'il en soit, on se rend compte que le développement critique nécessaire au succès de cette entreprise est une technique efficace de cophasage. Je présente dans la partie "applications" de cette thèse une technique, dite des "speckles dispersés", qui pourrait vraisemblablement répondre aux besoins de l'imagerie directe.

Evolution of high-resolution techniques...

From Speckles to AO imaging... & From Visibilities to Direct imaging...

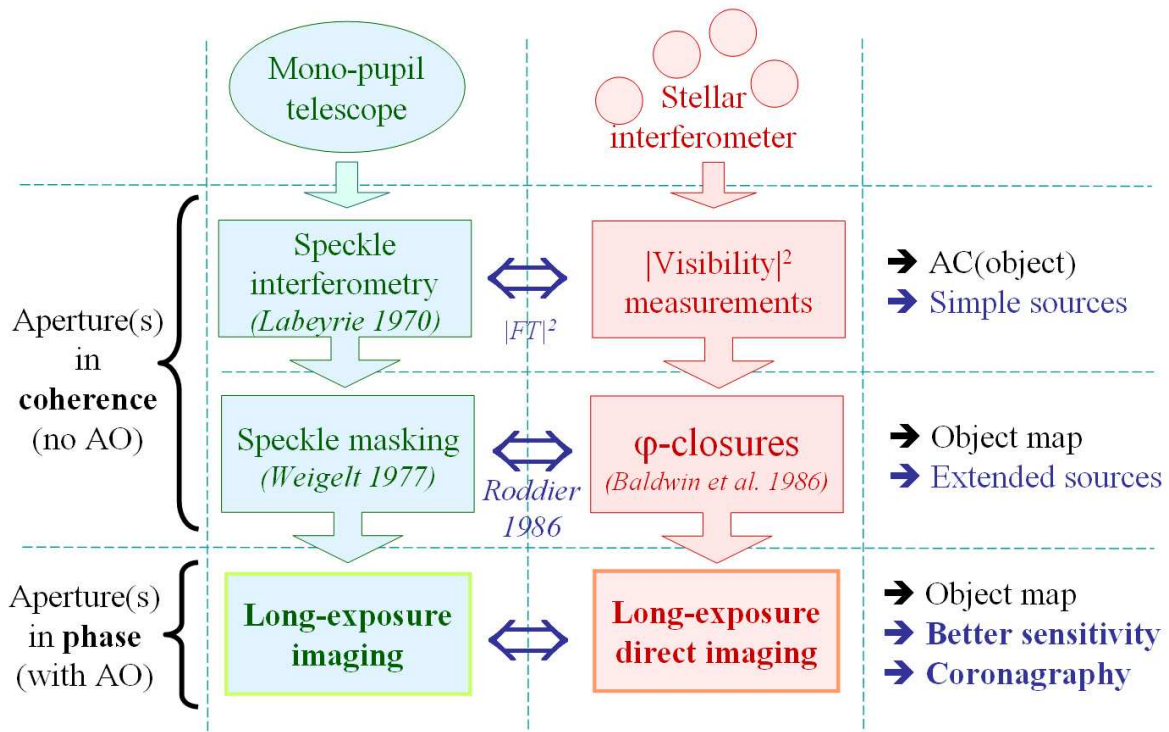


FIG. 2.4 – Evolution comparée des techniques de haute résolution angulaire : télescope monopupille et interféromètre (figure par Olivier Lardière). L'apport d'une bonne technique de cophasage permettra à la science faite avec un interféromètre de faire un grand bond, tout à fait comparable à celui qu'a permis l'utilisation de l'optique adaptative pour les télescopes monopupille. L'imagerie directe en longue pose offrira une dynamique optimale et permettra de faire de la coronagraphie.

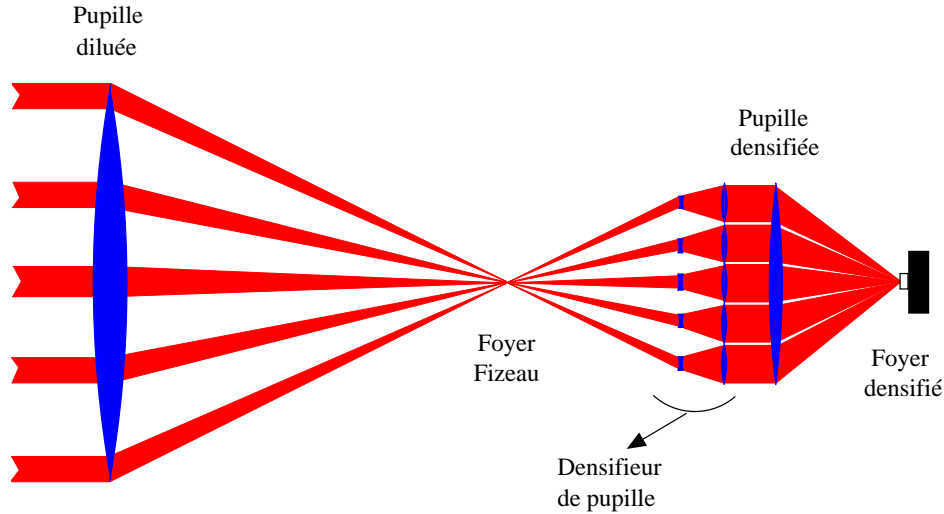


FIG. 2.5 – De l’interféromètre de Michelson à l’hypertélescope : généralisation du principe de densification de pupille pour permettre l’imagerie directe et la coronagraphie au foyer d’un interféromètre. Le densifieur, constitué d’un réseau de petites lunettes de Galilée inversées agrandit chacune des sous pupilles et produit une pupille plus compacte, densifiée. Sur un champ réduit, l’interféromètre peut alors produire une image directement exploitable.

2.3 De l’interféromètre à l’hypertélescope

Le concept d’hypertélescope tel qu’il a été proposé par [Labeyrie 1996] fait repenser l’interféromètre stellaire de Michelson comme un véritable système imageur direct. Labeyrie présente l’hypertélescope comme un télescope géant devant lequel on aurait placé un masque percé de très nombreux trous (*c.f.* figure 2.5), au foyer duquel on peut *a priori* faire une image directe.

Le faible taux de remplissage d’une telle pupille, défini par le rapport entre la surface collectrice totale de l’interféromètre et la surface qu’aurait le miroir géant équivalent, produit une FEP étalée et peu contrastée. La densification de la pupille, permet de compenser la faiblesse de cette image dite “Fizeau” (*c.f.* figure 2.5 au prix toutefois, d’après [Labeyrie 1996] d’une réduction du champ).

On appelle γ_D le facteur de densification, défini [Labeyrie 1996] par le rapport des caractéristiques de la pupille densifiée sur celles de la pupille d’entrée :

$$\gamma_D = \frac{d_o/D_0}{d_i/D_i}, \quad (2.8)$$

où D représente le diamètre de l’interféromètre d celui d’une sous ouverture, les indices i (input) ou o (output) désignant respectivement la pupille d’entrée et la pupille densifiée.

La densification maximale *a priori* acceptable est atteinte lorsque les sous pupilles deviennent jointives. Un réseau périodique permet d’obtenir la meilleure densification, conduisant à un remplissage optimal de la pupille de sortie du densifieur. Appelons S le pas d’un

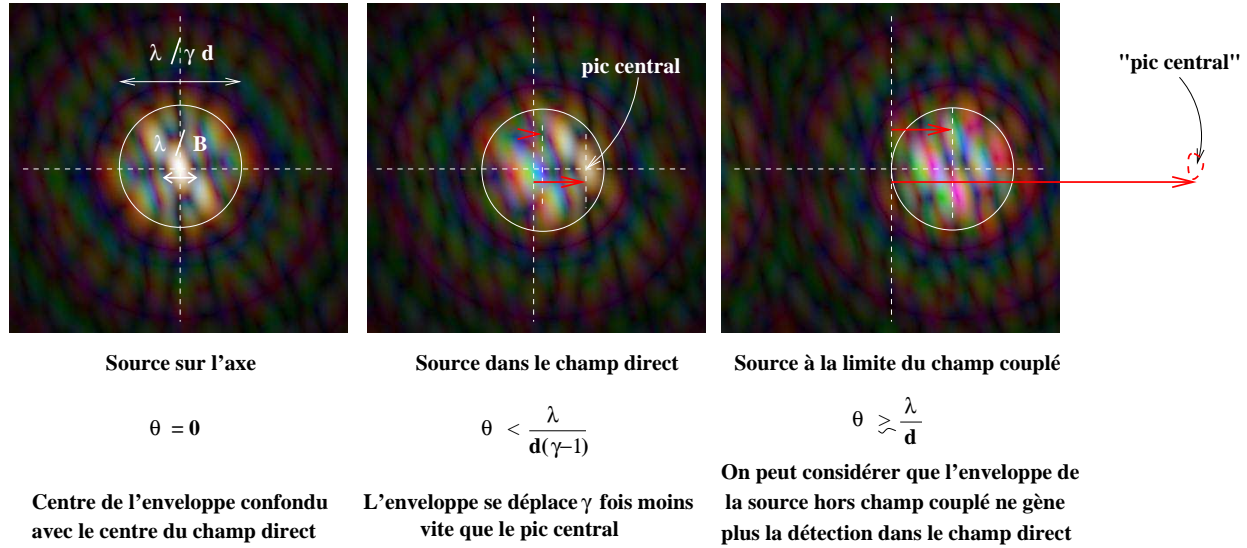


FIG. 2.6 – Evolution comparée de la position d'un pic et de l'enveloppe d'une source en fonction de sa position angulaire, pour le recombineur hypertélescope VIDA au VLTI (simulations par Olivier Lardière).

tel réseau : la densification est maximale lorsque $d_O = S$ (*c.f.* figure 2.7) : dans ce cas, la partie centrale de la fonction interférence est très proche de celle que fournirait un télescope continu de diamètre équivalent.

L'image faite au foyer d'un hypertélescope n'est pas invariante par translation et l'allure de la FEP change selon la position angulaire de la source par rapport à l'axe optique (*c.f.* figure 2.6). L'enveloppe de diffraction d'une sous ouverture se déplace en effet γ_D moins vite que la fonction d'interférence, voire même se déplace dans le sens opposé (*c.f.* densification positive et négative par [Gillet *et al.* 2003]). La relation de convolution objet-image disparaît alors. En faisant toutefois l'hypothèse d'une densification forte qui immobilise l'enveloppe et pour de petits angles, Labeyrie montre qu'une relation de pseudo-convolution subsiste, de la forme suivante :

$$I(x, y) = \frac{A(x, y)}{\gamma_D^2} \times \left(O\left(\frac{x}{\gamma_D}, \frac{y}{\gamma_D}\right) \otimes Int(x, y) \right), \quad (2.9)$$

où $A(x, y)$ représente le lobe de diffraction d'une sous ouverture densifiée et $Int(x, y)$ la fonction interférence, *i.e.* la FEP d'un interféromètre constitué d'ouvertures ponctuelles dont les positions coïncident avec les centres des sous ouvertures réelles. Si la densification est forte (*i.e.* $\gamma_D \gg 1$), on peut en effet considérer que quelque soit la position de la source dans le champ, le lobe de diffraction de chaque sous pupille agrandie reste immobile. Cette enveloppe agit comme une fenêtre plus étroite d'un facteur γ_D dans laquelle (par conservation de l'énergie) les sources se trouvent intensifiées d'un facteur γ_D^2 . Dans cette étroite fenêtre, une image directe est alors possible.

2.3.1 Champ et complexité des sources

La notion de champ utile

La particularité d'un interféromètre, par rapport à un télescope monopupille, est de n'offrir qu'une couverture lacunaire des fréquences spatiales. Cette particularité fait que, malgré l'utilisation d'une recombinaison hypertélescope (qui n'est finalement rien d'autre qu'une méthode optique de reconstruction d'image), on ne peut obtenir l'image directe d'une source arbitrairement complexe.

En utilisant la théorie de l'information de [Shannon 1948], [Koechlin 2003] établit que la limite du rapport champ/résolution des images obtenues par un interféromètre n'est fonction que du nombre d'ouvertures et de la dynamique de mesure des observables : modules de visibilité et phases.

Ce rapport champ/résolution, élevé au carré donne le nombre d'éléments de résolution disponibles dans ce qu'on peut appeler le champ utile (utile au sens où c'est dans ce champ qu'on peut contruire une image) de l'interféromètre et donne une limite à la complexité acceptable de l'objet observé : si celle ci est trop élevée, l'imagerie directe en une seule pose est impossible et des observations avec d'autres bases (par exemple par super synthèse) sont nécessaires. La résolution, elle, est simplement imposée par la base maximale du réseau. Ainsi, en connaissant le rapport champ/résolution, on connaît le champ utile, et ce, indépendamment du choix du mode de recombinaison.

Un interféromètre cophasé, constitué de n_T ouvertures organisées suivant un réseau non redondant, donne accès à $n_T * (n_T - 1)/2$ visibilités complexes (*i.e.* module et phase), soient au total $n_T * (n_T - 1)$ mesures en une seule pose. La quantité d'information d'un ensemble de mesures est donnée par l'entropie de Shannon. En supposant pour simplifier que la dynamique de mesure, qu'on note δ est la même pour module et phase, cette entropie des données brutes est forcément bornée par :

$$H \leq n_T * (n_T - 1) \log_2(\delta). \quad (2.10)$$

Dans l'image qu'on cherche à construire, l'entropie de chaque élément de résolution (on parlera dorénavant de *resel*) est donnée par la dynamique de mesure δ_R de ce resel. Si cette dynamique est identique pour chacun des n_R resels, l'entropie de l'image vaut alors :

$$H_{ima} = n_R \log_2(\delta_R) = \left(\frac{\text{champ}}{\text{résolution}} \right)^2 \log_2(\delta_R). \quad (2.11)$$

Koechlin utilise ces deux équations pour donner la limite du nombre de résels en supposant que la méthode de reconstruction est telle que la dynamique de l'image reconstruite est égale à celle des données brutes (*i.e.* $\delta = \delta_R$) :

$$n_R \leq n_T * (n_T - 1). \quad (2.12)$$

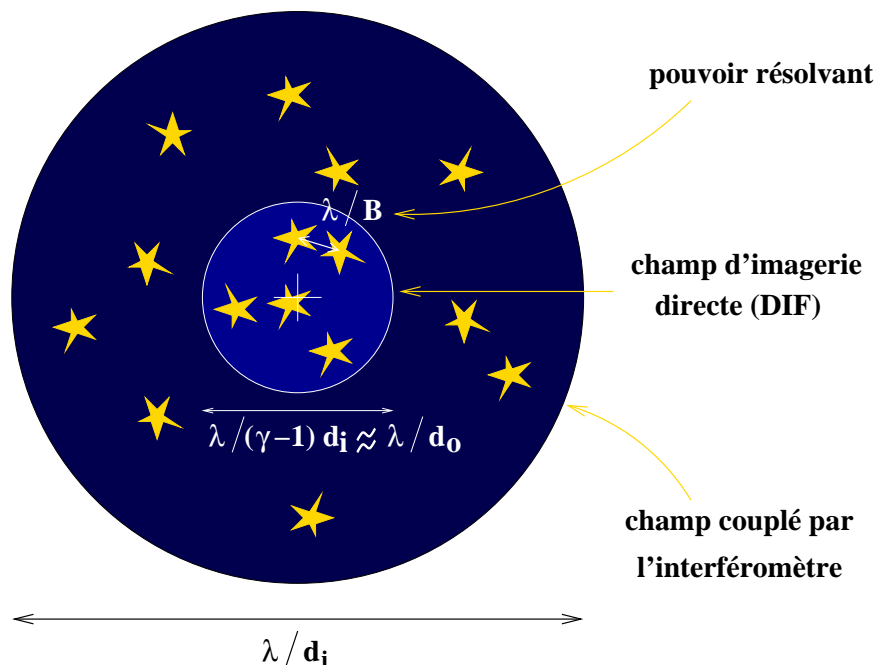


FIG. 2.7 – Dimensions caractéristiques du champ d’un hypertelescope. Le champ couplé par l’interféromètre correspond à l’enveloppe de diffraction d’une sous ouverture non densifiée λ/d_i . Le champ d’imagerie directe (appelé DIF pour *Direct Imaging Field*) est de la taille de celle d’une sous ouverture densifiée λ/d_o . Le pouvoir résolvant est donné par la base maximale de l’interféromètre λ/B .

C’est un résultat “classique” de dire que pour un grand nombre d’ouvertures, le nombre de resels est égal au carré du nombre de ces ouvertures. Dans ces conditions, si B est la base maximale de l’interféromètre (*c.f.* notations figure 2.7), le champ utile se limite alors à :

$$\text{champ} \leq \frac{\lambda}{B} \times \sqrt{n_T * (n_T - 1)}, \quad (2.13)$$

La figure 2.7 met en évidence deux autres champs qu’il faut bien distinguer :

- **le champ couplé** : qui est le champ dans lequel toutes les sources sont couplées dans l’interféromètre, c’est à dire dont les photons seront sur le détecteur. Ce champ concerne tous les interféromètres et n’est fonction que de la taille des sous pupilles de l’interféromètre, *i.e.* λ/d et de l’éventuel emploi d’un filtrage spatial, par exemple par une fibre optique.
- **le champ direct** : qui est la fenêtre dans laquelle l’hypertelescope permet l’obtention d’une image directe. La dimension de ce champ est fonction de la densification et vaut $\frac{\lambda}{(\gamma-1)d_i}$.

On a tout intérêt à ajuster la densification de façon à rendre le champ direct (appelé DIF) confondu avec le champ utile. L’égalité des deux champs :

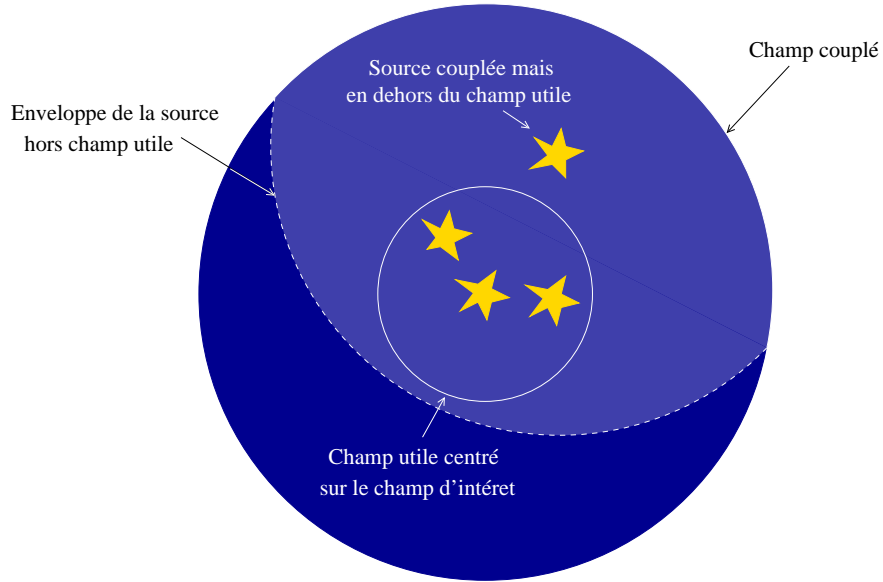


FIG. 2.8 – Pollution du champ interférométrique utile (non densifié) par une source couplée mais placée en dehors du champ utile. L’enveloppe de cette source couvre le champ utile et y ajoute un halo de speckles. Lorsque le nombre total de sources dans le champ couplé dépasse une limite dite “d’encombrement de champ” (ou “crowding”), le niveau du halo de speckles empêche l’obtention d’une image directe.

$$\frac{\lambda}{B} \times \sqrt{n_T * (n_T - 1)} \underset{\text{champ utile}}{=} \underset{\text{champ direct}}{\frac{\lambda}{(\gamma-1)d_i}}$$

conduit à l’obtention d’un coefficient de densification optimal d’une pupille non redondante, qu’on peut approximer pour une densification *a priori* forte et un grand nombre d’ouvertures :

$$\gamma_{opt} = 1 + \frac{B}{d\sqrt{n_T * (n_T - 1)}} \approx \frac{B}{d * n_T}. \quad (2.14)$$

AN : pour les 4 ouvertures de 8 mètres de l’interféromètre VLTI de l’ESO à Paranal séparés par une base maximale de 130 mètres, on trouve un facteur de densification optimal $\gamma_{opt} \approx 5$. Bien qu’appliquée à un faible nombre de télescopes, cette valeur est déjà en bon accord avec la densification proposée par [Lardièrre et al. 2005] qui vaut $\gamma = 5.67$ avec le recombineur hypertélescope VIDA.

Intéressons nous un instant à une configuration très simple : un interféromètre constitué de n_T télescopes organisés en ligne avec un pas régulier (*c.f.* figure 2.9). La densification optimale suggérée par l’équation 2.14 est en fait obtenue lorsque les sous pupilles de la pupille densifiée sont rendues jointives [Lardièrre & Martinache 2005].

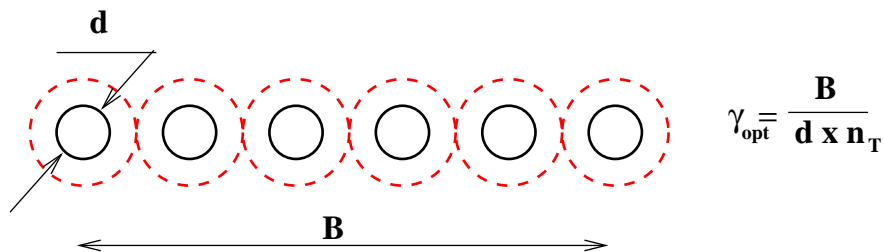


FIG. 2.9 – La densification optimale, qui rend le champ direct égal au champ utile est obtenue (dans le cas d’une pupille redondante) lorsque les sous pupilles sont rendues jointives.

Une telle densification de la pupille est une solution optique qui optimise l’utilisation des photons de toutes les sources en les concentrant dans le seul champ utile, imposé uniquement par le nombre de télescopes. **On ne peut donc pas dire du montage hypertélescope qu’il fait perdre du champ, mais plutôt qu’il cantonne l’observations aux seules sources accessibles en une pose courte dans ce qui a été défini comme le champ utile.**

2.4 Les hypertélescopes et l’imagerie grand champ

L’hypertélescope fait donc, en pose instantanée, on vient de le voir, une utilisation optimale des photons des sources observables, en agissant comme une fenêtre sur le ciel, qui intensifie les images des sources qui contenues dedans.

2.4.1 Limite d’encombrement du champ

Rien n’empêche cependant le champ couplé d’un interféromètre d’être beaucoup plus étendu que le champ utile, comme c’est par exemple le cas sur la figure 2.8. Ainsi, si une source est située dans le champ couplé tout en étant située à l’extérieur du champ utile, bien que cette source ne puisse pas être directement imagée (elle est en dehors du champ utile), son enveloppe vient malgré tout “polluer” le champ utile en montant le niveau du halo de speckles dans ce champ, à peu près de la même façon, quel que soit le mode de recombinaison choisi. La limite de pollution est en effet indépendante de la densification, voire par exemple la figure 2.6 qui montre en pupille densifiée qu’une source “pollue” le champ direct tant qu’elle n’est pas sortie du champ couplé, tout comme dans le cas non densifié de la figure 2.8.

Sur cette figure, on voit que l’image de chaque source est faite d’un pic entouré d’un halo de speckles. Conservons les notations utilisées précédemment en appelant n_T le nombre de télescopes du réseau. Le pic, résultant de la somme de n_T amplitudes complexes en phase est d’intensité moyenne proportionnelle à n_T^2 . Chaque région du halo reçoit, elle, n_T contributions de phases aléatoires. L’intensité moyenne résultante est proportionnelle à n_T .

La détection des pics dans le champ direct n'est possible que si l'amplitude des fluctuations du halo de speckles dépasse l'intensité des pics *a priori* directement imageables. Cette limite est atteinte lorsque le nombre de sources couplées dépasse le carré du nombre de télescopes, dans le cas d'une pupille non redondante. **C'est cette limite d'encombrement du champ qui constitue la limite ultime du champ restructurable des interféromètres. Elle est indépendante du mode de recombinaison choisi.**

2.4.2 Observation de champs riches

Lorsque cette limite est dépassée, on peut envisager de rajouter un filtrage spatial au foyer de chaque télescope pour réduire le champ couplé, soit faire de la supersynthèse, c'est à dire utiliser plusieurs observations consécutives dans différentes configurations de l'interféromètre (en déplaçant les télescopes ou en utilisant la rotation de la Terre) et ainsi "artificiellement" augmenter le nombre de télescopes. L'imagerie grand champ apparaît de toute façon clairement comme l'apanage des réseaux interférométriques contenant de nombreuses ouvertures.

On peut à la lumière de cette discussion se poser la question suivante : Le mode de recombinaison hypertélescope est-il vraiment compatible avec la supersynthèse d'ouverture ? On vient de voir que la limite d'encombrement de champ est la même quel que soit le mode de recombinaison utilisé. Ceci veut donc dire que pour imager :

- soit l'intégralité du champ couplé dans le cas d'une recombinaison de type Fizeau,
- soit seulement une fraction de ce champ total (*i.e.* le DIF) dans le cas d'une recombinaison densifiée,

on doit utiliser le même nombre de configurations de la pupille de l'interféromètre.

Dans ce cas précis, on peut dire que la recombinaison hypertélescope fait perdre du champ puisqu'un même nombre de bases ne permet d'imager, dans le cas densifié, qu'une fraction du champ total accessible. Cette conclusion est toutefois beaucoup plus nuancée lorsqu'on s'intéresse au temps de pose nécessaire à l'obtention de l'image Fizeau :

La densification, on l'a vu, fait que le champ d'imagerie directe est réduit (en diamètre) d'un facteur γ_D par rapport au champ couplé. Autrement dit, pour couvrir la totalité du champ couplé, en mode hypertélescope, il faut faire une mosaïque de γ_D^2 champs directs différents. Or, dans le même temps, l'intensification de l'image par ce même facteur γ_D^2 fait que le temps de pose nécessaire à l'obtention du même rapport signal sur bruit (en ne considérant que le bruit de photon) est réduit dans la même proportion ! On voit donc que le temps de pose total nécessaire à la couverture du champ couplé en mode densifié est le même qu'en mode Fizeau.

La différence est que dans le cas Fizeau, l'intégralité de l'image n'est obtenue qu'après la toute dernière observation alors que dans le cas d'une observation hypertélescope, une partie de la mosaïque est accessible après chaque série de pose. Ce cas de figure nous fait également

jouir d'un autre avantage : le temps caractéristique de stabilité globale de l'interféromètre peut être réduit d'un facteur γ_D^2 .

2.4.3 En résumé

Au delà du simple aspect esthétique que constitue l'obtention d'une image directe au foyer d'un interféromètre, la recombinaison hypertélescope présente un certain nombre d'avantages :

- **mêmes limites que n'importe quel interféromètre** : limite de champ imposée uniquement par la pupille d'entrée de l'interféromètre et non par le mode de recombinaison.
- **mode de recombinaison optimal** : lorsque l'on est en deçà de la limite d'encombrement du champ, la densification de pupille permet une utilisation optimale des photons : elle égalise le champ utile défini par les bases interférométriques en le transformant en champ d'imagerie directe.
- **l'intensification de l'image** : elle induit une moindre sensibilité au bruit de détecteur, contrairement à un mode de recombinaison non densifié et permet selon la densification d'observer des objets beaucoup plus faibles.
- **la possibilité de faire de la coronographie** : la FEP d'une pupille densifiée est en effet bien mieux adaptée à cette technique particulièrement exigeante dont on parlera plus en détails dans le chapitre 3.

La densification de pupille constitue avant tout une petite révolution conceptuelle. Labeyrie a montré qu'on peut tout à fait contourner ce qui s'était établi comme la règle d'or de l'imagerie [Traub 1986], qui empêchait toute reconfiguration non exactement homothétique de la pupille d'entrée de l'interféromètre. Cette règle est modifiée : pour conserver une relation objet-image simple (sur un champ toutefois limité), il suffit de conserver la géométrie des centres des sous pupilles. L'hypertélescope démystifie l'interféromètre optique en le faisant finalement ressembler à un simple télescope.

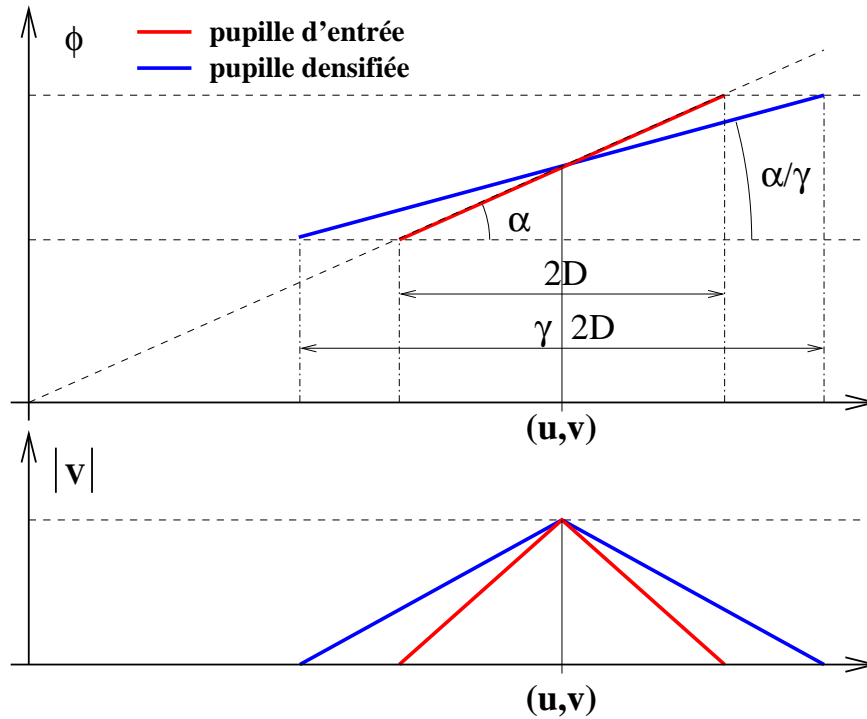


FIG. 2.10 – Effet de la densification de pupille vu dans le plan (u, v) pour une source hors axe (position angulaire α). L’effet “marche d’escalier” décrit par Labeyrie sur le front d’onde des sources hors axe peut être corrigé de façon simple dans ce plan en restaurant la taille des sous parties de l’autocorrélation de la pupille.

Relation objet-image en pupille densifiée

Des travaux antérieurs [Tallon & Tallon Bosc 1992] avaient montré que la dégradation des images induites par la densification de pupille peut être corrigée par un traitement *post* détection (pour des images monochromatiques). Sous certaines conditions, le champ peut alors être intégralement restauré. Ils montrent en effet que dans le plan (u, v) , l’opération de densification se résume à une simple translation de l’information vers les basses fréquences spatiales : ils abordent la densification comme un rapprochement des sous pupilles. La figure 2.10 présente l’autre point de vue (bien entendu strictement équivalent) de la densification : un zoom des sous pupilles par un densifieur tel qu’il est présenté figure 2.5.

Etant donnée encore une fois, la stricte équivalence entre l’image et le plan (u, v) (l’un étant la TF de l’autre), on peut très simplement corriger l’effet de la densification dans le plan (u, v) en rediluant l’information par le procédé inverse de celui présenté en figure 2.10 et par TF inverse, retrouver le champ perdu dans la densification tout en ayant bénéficié du gain sur le bruit du détecteur induit par la densification.

Peut on cependant complètement densifier la pupille ? La figure 2.11 présente ce qui se passe dans le plan (u, v) lors de la densification d’un interféromètre à 4 télescopes non redondant observant une source hors axe. Le diamètre de chaque zone contenant de l’information

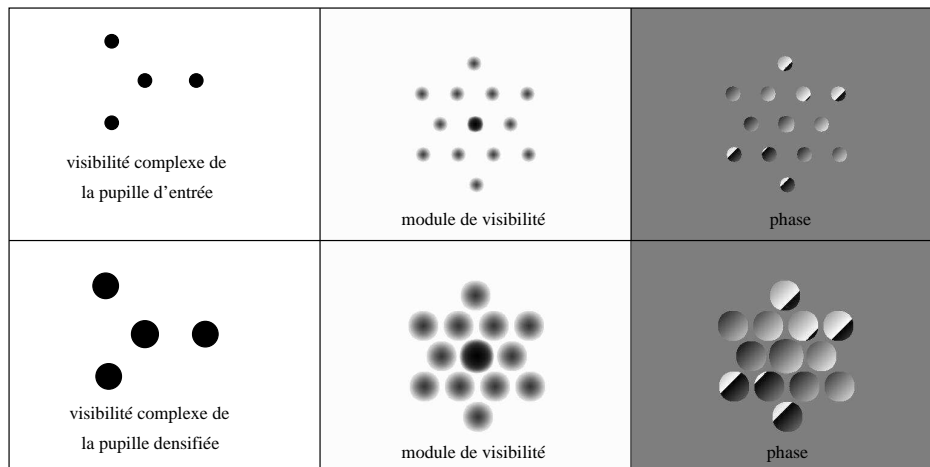


FIG. 2.11 – Limite de la densification de la pupille dans le cas d’ouvertures non ponctuelles. Un interféromètre à 4 télescopes combinés simultanément observe une source hors d’axe non résolue en mode Fizeau et pupille densifiée. On voit qu’un facteur de densification supérieur à celui utilisé ici induirait un recouvrement partiel des fréquences spatiales ajoutant une redondance “artificielle” à la pupille : la restauration du champ n’est plus possible.

est le double de celui d’une sous pupille densifiée (*c.f.* figure 2.10). On voit alors que si la pupille est trop densifiée (ce qui est le cas lorsqu’on rend les sous pupilles jointives), il y a recouvrement partiel des informations dans le plan (u, v) : une telle densification introduit une redondance artificielle dans la pupille et la méthode de restauration du champ de [Tallon & Tallon Bosc 1992] n’est plus applicable : on peut alors parler de surdensification.

Les interféromètres actuels n’utilisent toutefois pas cette information basse fréquence présente dans les petites “régions actives” du plan (u, v) . Soit leurs ouvertures sont en effet très petites, soit elles subissent un filtrage spatial par l’emploi de fibres optiques ou par la dégradation de l’image en speckles qui débordent du champ utile. Dans tous les cas, on n’accède alors qu’à un terme de phase moyennée se traduisant par un piston et il faudra attendre que chaque télescope soit équipé d’une optique adaptative suffisamment performante pour aller au delà.

Densification-dilution

Comme signalé précédemment, en plus de rendre moins sensible au bruit de détecteur, une réorganisation adaptée de la pupille permet de faire de la coronagraphie. En effet, l’image d’une source sur l’axe au foyer d’une pupille correctement reconfigurée n’est plus constituée que d’un seul pic de diffraction “blanc” qu’on peut coronographier bien plus facilement qu’une forêt de pics dispersés dans le cas d’une pupille diluée. Certains auteurs y voient même là le principal avantage des hypertélescopes, la moindre sensibilité au bruit de détecteur passant au second plan : ceci se vérifiera d’autant plus qu’on en améliore constamment la qualité.

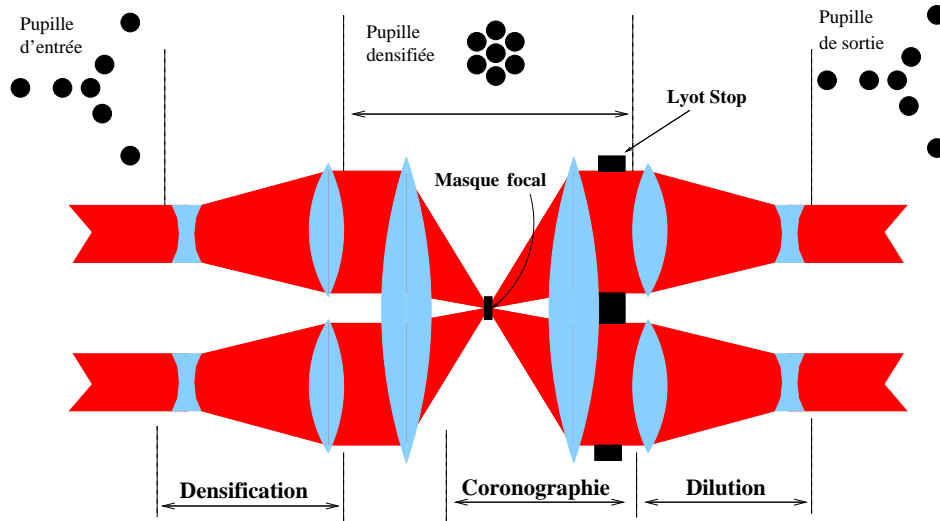


FIG. 2.12 – Opération de densification-dilution de la pupille : la pupille est ici densifiée afin de la rendre compatible avec un coronographe. La pupille de sortie est rendue homothétique à celle d’entrée par un système identique à celui utilisé pour la densification mais inversé.

Poussant cette idée à son paroxysme, [Guyon & Roddier 2002] suggèrent d’opérer une reconfiguration de la pupille sans même plus chercher à en respecter la géométrie, comme s’y limite Labeyrie dans le cas des hypertélescopes : on peut alors véritablement parler de reconfiguration “anarchique” !

Le champ résultant d’une telle reconfiguration (*c.f.* figure 2.12) est certes nul mais produit néanmoins sur l’axe un front d’onde plan pour une pupille compacte : des conditions idéales pour permettre la coronagraphie une étoile non résolue. Pour recouvrir l’intégralité du champ, ces auteurs proposent tout simplement de reconfigurer la pupille après passage par le coronographe qui filtre la source de lumière parasite. Il s’agit ici d’appliquer exactement la même correction que celle dont il a été fait mention précédemment mais de manière optique, avant détection (*c.f.* figure 2.12).

En l’absence du coronographe, l’opération de densification-dilution proposée par ces auteurs n’a tout simplement aucun effet. La pupille de sortie est une homothétie parfaite de la pupille d’entrée et la relation objet-image est conservée sur l’intégralité du champ : la règle d’or est en effet respectée. En présence du coronographe, seule la zone du champ proche du masque est affectée avec une transmission qui tend vers zéro sur l’axe. Ailleurs, la relation objet-image est vérifiée, un soin particulier devant malgré tout être apporté à l’opération de déconvolution.

Quoi qu’il en soit, l’idée de Guyon va au delà de la simple densification puisque que la reconfiguration de la pupille qu’il propose ne respecte même plus la géométrie globale de l’interféromètre : tout est bon pour produire une pupille qui soit la plus adaptée possible au coronographe, à condition toutefois, avant de placer le détecteur final, de la reconfigurer comme elle était à l’entrée. La règle d’or devient que pour produire une véritable image, on

doit garantir effectivement que la pupille de sortie est une homothétie de la pupille d'entrée
... mais entre deux, on peut faire ce qu'on veut !

Chapitre 3

Reconfiguration continue de la pupille

3.1 Introduction

Une fois admise l'idée qu'on puisse reconfigurer la pupille de sortie d'un instrument, même lorsque celui ci est destiné à faire de l'imagerie, les possibilités ouvertes n'offrent plus de limite! On a vu dans le cas des interféromètres, que densifier la pupille permet d'optimiser l'utilisation des photons collectés, pour faire de l'imagerie ou permettre de faire de la coronographie. Selon les cas de figure, la réduction du champ induite par la reconfiguration de la pupille peut tout à fait être acceptable. Sa restauration est de toute façon possible en utilisant une copie des optiques qui reconfigurent la pupille, qu'on utilise tout simplement à l'envers.

On s'intéresse dans cette section à une autre forme de reconfiguration de la pupille, adaptée cette fois ci à un télescope simple (*i.e.* qui ne soit pas un interféromètre). Pour la grande majorité des télescopes d'aujourd'hui, des discontinuités de la pupille existent malgré tout : longtemps ignorée par les observateurs, l'obstruction de la pupille induite par un miroir secondaire et sa structure porteuse (qu'on appelle souvent araignée) ont des effets dévastateurs lorsqu'on cherche à fabriquer des images à haute dynamique. Bon nombre de projets de coronographie prévoient maintenant l'emploi d'optiques hors axe qui permettent de contourner le problème. Même si, la fabrication de telles optiques est encore réservée à une minorité, nous nous placerons dans ce cas de figure et ignorerons la présence d'une obstruction, raison pour laquelle ce chapitre parle véritablement de reconfiguration continue de la pupille.

L'idée d'une telle reconfiguration n'est pas vraiment nouvelle : elle a été entre autres mise en oeuvre en radio-astronomie pour réduire les lobes secondaires de diffraction des antennes radio ou pour transformer le faisceau naturellement gaussien sortant d'un laser en faisceau uniforme. Pourtant, l'idée d'utiliser cette technique au cas de l'imagerie est plutôt récente [Guyon 2003]. Cela tient sans doute au fait qu'elle va encore une fois à l'encontre de la règle d'or de l'imagerie [Traub 1986] qui contraint la pupille à rester en permanence homothétique à la pupille d'entrée.

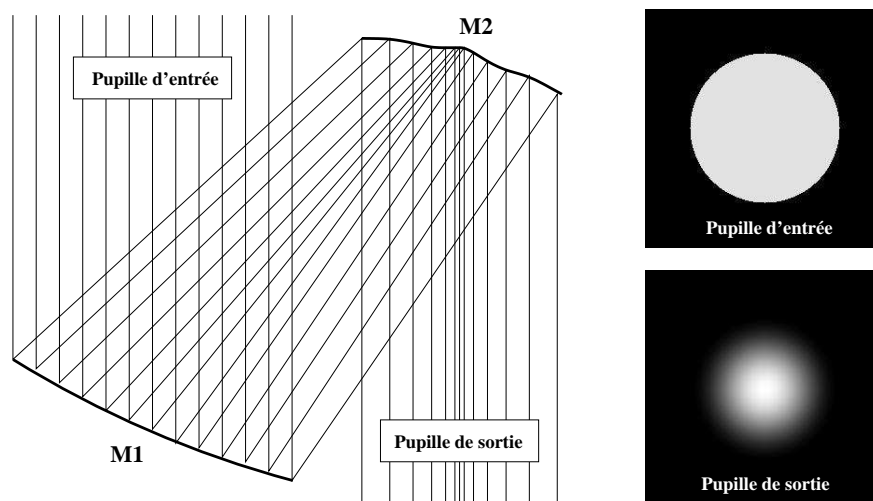


FIG. 3.1 – Illustration en tracé de rayon d’une apodisation PIAA. La pupille d’entrée, uniformément éclairée est reconfigurée par un jeu de deux optiques concentrant la lumière vers le centre tout en maintenant l’égalité des chemins optiques sur l’axe. L’utilisation d’optiques par réflexion permet d’obtenir une apodisation parfaitement achromatique.

Cela dit, on l’a vu dans le chapitre précédent, cette règle d’or peut tout à fait être contournée de façon temporaire. Si on restaure la pupille avant le détecteur final, on retrouve la capacité d’imagerie “grand champ” du système. S’il faut entre deux, pouvoir disposer d’une pupille reconfigurer, pourquoi s’en priver ?

3.2 Le principe du PIAA

L’idée originale, baptisée PIAA pour *Phase Induced Amplitude Apodization* et présentée dans [Guyon 2003] consiste à reconfigurer géométriquement la pupille d’un télescope grâce à deux optiques asphériques. La figure 3.1 illustre le fonctionnement de cette technique de recombinaison. Une première optique, placée dans un plan pupille modifie la distribution géométrique de la lumière en la concentrant au centre et en la diluant sur les bords. Imposer un tel traitement à la pupille induit forcément des distorsions du front d’onde qui sont compensées grâce à une seconde optique : dans la limite de l’optique géométrique, le PIAA produit alors sur l’axe un front d’onde parfaitement corrigé et apodisé. [Guyon 2003] démontre l’existence d’une solution optique continue pour que la pupille de sortie d’un PIAA soit parfaitement configurée pour l’imagerie à très haute dynamique. Un exemple d’une telle fonction est donnée à la figure 3.2. L’utilisation du PIAA se décline sous différentes versions : le système peut se suffire à lui même et fonctionner en apodisation pure (on parle de PIAAI (*imager*)) ou être utilisé dans un coronographe (le PIAAC).

On s’intéresse au cas d’un système centré, à symétrie de révolution. La fonction d’apodisation est définie par une fonction de correspondance entre les positions (par conséquent

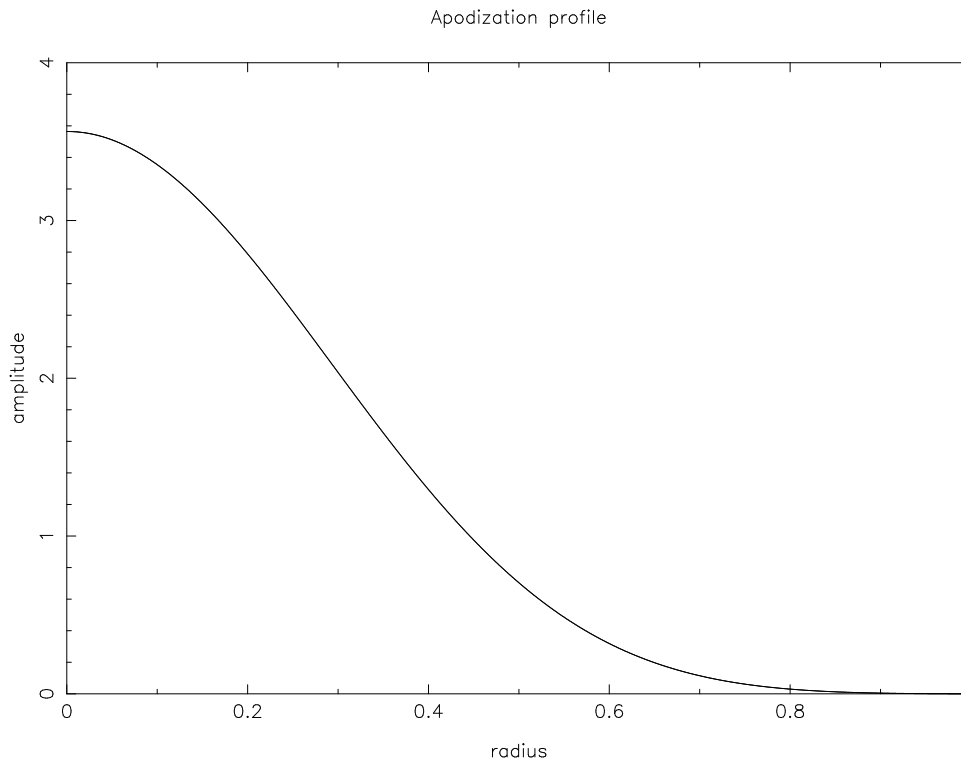


FIG. 3.2 – Profil d’apodisation (en module) utilisé dans les simulations illustrant ce chapitre. La reconfiguration de la pupille uniformément éclairée par le PIAA concentre la lumière vers le centre de la pupille ce qui amplifie le module et lui permet de prendre une valeur supérieure à l’unité. Ici, le module au centre atteint 3.56. Pour produire une apodisation d’allure similaire avec un masque absorbant, la transmission totale du masque ne dépasserait pas 7.9 %.

purement radiales) dans les plans M_1 et M_2 (*c.f.* figure 3.1) d’entrée et de sortie de faisceau : $r_2 = f(r_1)$.

Quelle que soit la fonction d’apodisation désirée, le profil des deux optiques $M_1(r)$ et $M_2(r)$ doit vérifier le système d’équations différentielles suivant, initialement donné dans [Guyon 2003] :

$$\frac{d M_1}{d r_1} = \frac{d M_2}{d r_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{r_1 - r_2} \right)^2} - \frac{M_2 - M_1}{r_1 - r_2}. \quad (3.1)$$

Ce système d’équations, également retrouvé par [Traub & Vanderbei 2003], garantit qu’une source sur l’axe ne souffre d’aucune aberration (première égalité) et que la pupille est correctement apodisée (seconde égalité).

Cette apodisation doit sa puissance au fait qu’elle est de nature purement géométrique, contrairement à d’autres techniques proposées par [Aime *et al.* 2001] ou [Martinache 2004c], qui apodisent une pupille par voie interférométrique. Si de plus, l’apodisation PIAA est effectivement implémentée avec des miroirs (qui seront par contre nécessairement hors d’axe!),

l'apodisation est rendue complètement achromatique.

3.2.1 Pourquoi faire tout ça ?

Cette proposition d'apodiser par reconfiguration continue de la pupille émerge au moment où se profile le choix d'un concept pour la version coronographe du TPF (*Terrestrial Planet Finder*) de la NASA. La coronographie, ainsi qu'une approche de l'évaluation de ses performances pour la détection d'exoplanètes font l'objet du chapitre 5 de cette thèse. Ce que l'on peut néanmoins déjà dire, c'est que le PIAA est un sérieux candidat pour la mission TPF-C puisqu'il est le seul concept à offrir cette combinaison unique d'avantages :

- C'est une apodisation sans perte de résolution rendant la recherche de compagnons angulairement proches ($< 1.5 \lambda/D$) tout à fait possible.
- La transmission pour les sources hors-axe avoisine très rapidement 100 %.
- Elle est peu sensible aux erreurs de pointage et à la résolution partielle du diamètre angulaire de l'étoile observé.

3.2.2 Comparaison avec la pupille densifiée

La reconfiguration de la pupille mise à l'oeuvre dans le PIAA de Guyon présente d'évidentes similitudes avec la recombinaison hypertélescope de Labeyrie. La figure 3.3 illustre le passage (à une dimension) de la densification de pupille d'un interféromètre à l'apodisation PIAA en introduisant un concept intermédiaire, qui utiliserait une densification hétérogène, mais pour une pupille discontinue. Le coefficient de densification γ_D utilisé dans ce cas de figure est différent pour chacune des sous pupilles et permet d'obtenir une pupille globale apodisée. La pente locale du front d'onde, elle, se voit multipliée par l'inverse du coefficient de densification local : elle est donc amplifiée au centre de la pupille pour lequel $\gamma_D < 1$ mais elle s'aplatit et tend vers zéro sur les bords pour lesquels $\gamma_D \gg 1$. L'apodisation de la pupille induite par un PIAA est très proche de la solution qui vient d'être présentée, si ce n'est que la reconfiguration est ici continue.

3.2.3 Propriétés des images hors-axe

Sur l'axe, les choses sont simples. La combinaison des deux optiques composant le PIAA est choisie de façon à n'introduire aucune aberration optique : à la sortie du PIAA, on récupère donc un front d'onde apodisé parfaitement plan. Comme pour les hypertélescope, les choses se compliquent un tout petit peu lorsqu'on s'intéresse à une source hors-d'axe : en plus de la modification du profil d'amplitude vient s'ajouter une modification du profil de phase que l'on va chercher à caractériser.

La figure 3.3 illustre l'effet induit par la reconfiguration de la pupille : la composante radiale de la pente locale du front d'onde est amplifiée par l'inverse du coefficient de densification local dont la valeur est tous simplement donnée par la fonction d'apodisation.

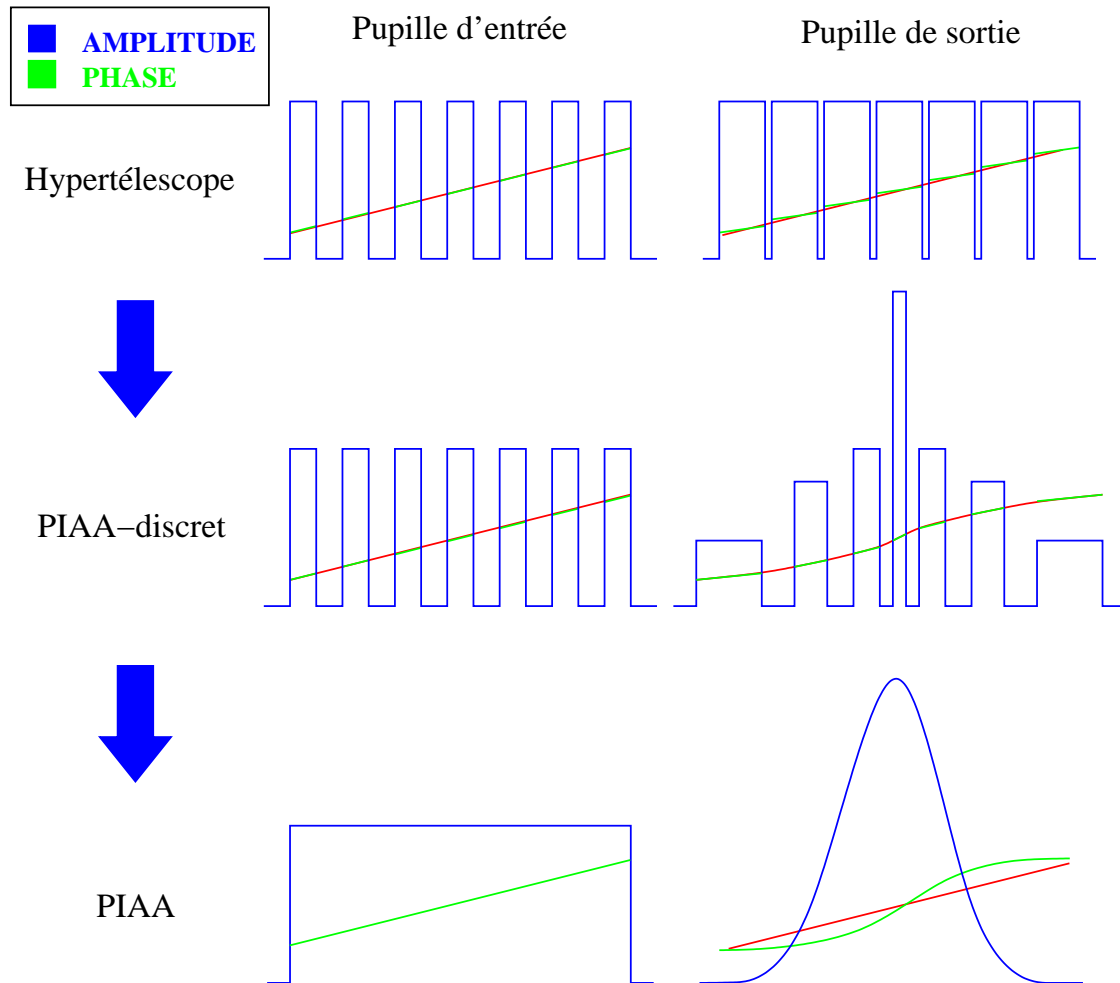


FIG. 3.3 – De la densification de pupille d’un interféromètre (hypertélescope) à l’apodisation d’un télescope monolithique par reconfiguration continue de la pupille (PIAA). Le cas intermédiaire d’une reconfiguration de la pupille d’un interféromètre suivant un schéma très proche de celle à l’oeuvre dans un PIAA permet de visualiser les aberrations induites pour un front d’onde en provenance d’une source hors-axe.

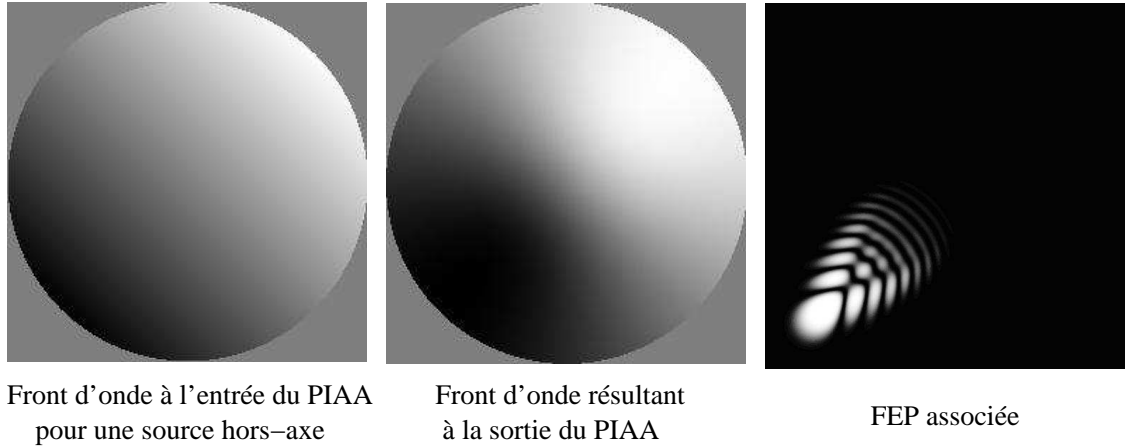


FIG. 3.4 – Reconfiguration continue du front d'onde d'une source hors axe d'azimut $\theta_0 = \pi/4$. Application pratique de l'utilisation de l'équation 3.4 pour le calcul de la FEP.

Appelons $A(r)$ cette fonction exprimant le module (*i.e.* la racine carrée de l'intensité) de l'onde sortant du PIAA en fonction du rayon (l'exemple utilisé est représenté sur la figure 3.2). Soient également α et θ_0 respectivement l'écart angulaire à l'axe et l'azimut de la source par rapport à l'axe des abscisses (voir l'exemple représenté sur la figure 3.4). Sur le domaine définissant la pupille d'entrée du PIAA, le front d'onde s'écrit alors, en coordonnées polaires, sous la forme suivante :

$$\phi(r, \theta) = \alpha r \cos(\theta - \theta_0). \quad (3.2)$$

Or, on vient de voir que dans la reconfiguration, la pente radiale locale du front d'onde est amplifiée par la valeur locale de la fonction d'apodisation. Dans la pupille de sortie du PIAA, cette pente s'écrit alors :

$$\frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} = \alpha A(r) \cos(\theta - \theta_0). \quad (3.3)$$

L'intégration suivant r de cette expression conduit à l'équation du front d'onde pour une source hors axe à la sortie du PIAA :

$$\phi(r, \theta) = \alpha \cos(\theta - \theta_0) \int_0^r A(\rho) d\rho. \quad (3.4)$$

Si on peut approximer la fonction apodisante à une gaussienne, le front d'onde possède alors une expression analytique simple :

$$\phi(r, \theta) = \alpha \cos(\theta - \theta_0) \operatorname{erf}(r). \quad (3.5)$$

En conclusion de ce point, on peut voir que comme dans le cas hypertélescopes, même si la FEP d'une source hors d'axe au foyer d'une pupille reconfigurée peut paraître abobina-

blement compliquée, n'étant même plus invariante par translation, des relations très simples subsistent dans la pupille.

3.2.4 La notion d'échelle focale

Lors d'une apodisation classique, assurée par un masque pupillaire de transmission variable, seul le module du front d'onde est transformé. L'effet recherché est la modification de la FEP dont le lobe principal se retrouve quelque peu étalé, mais dont l'énergie d'habitude contenue dans les anneaux d'Airy est considérablement diminuée. La phase, elle, n'est pas modifiée et la position de la FEP est identique à ce qu'elle serait en l'absence d'apodisation. Ce procédé respecte donc la relation de convolution objet-image et offre une FEP invariante par translation. L'élargissement du lobe principal de la FEP fait par contre clairement perdre de la résolution.

Lors de la reconfiguration de la pupille par le PIAA, le module et la phase de l'onde sont tous les deux modifiés : à la différence du cas précédent, la position de la FEP est donc modifiée. Cette caractéristique inédite à l'interprétation confuse par [Traub & Vanderbei 2003] a été clarifiée par [Guyon *et al.* 2005] qui discutent de la définition quelque peu délicate d'une échelle focale au foyer du PIAA. Disons que, pour poursuivre l'analogie avec les hypertélescopes, on peut parler, au foyer du PIAA de "pseudo plan image".

Le formalisme simple introduit au paragraphe précédent permet de quantifier assez facilement cet effet. L'amplitude complexe dans la pupille de sortie du PIAA est donnée par :

$$\Psi(r, \theta) = A(r) \times e^{i\phi(r, \theta)}, \quad (3.6)$$

où $A(r)$ est la fonction d'apodisation (représentée sur la figure 3.2) et $\phi(r, \theta)$ est la phase de l'onde donnée par l'intégration de l'équation 3.4. La fonction $A(r)$ agit comme une pondération faisant du centre de la pupille apodisée la contribution majeure du front d'onde. C'est donc, du moins au premier ordre, la pente du front d'onde au centre de la pupille apodisée qui impose la position du centre de la FEP. D'après l'équation 3.3, cette pente devient :

$$\alpha \Rightarrow A_{max} \times \alpha, \quad (3.7)$$

où $A_{max} = A(0)$, le module de l'amplitude complexe au centre de la pupille apodisée. Dans le pseudo plan image d'un PIAA, la notion d'échelle focale mérite un minimum d'attention, selon que l'on parle de λ/d "sur le ciel" ou "sur le détecteur" : l'élargissement de la FEP pourrait faire croire que le PIAA, comme toutes les apodisations, fait perdre de la résolution. L'amplification de la pente du front d'onde fait que "vu du ciel" (*i.e.* la seule chose qui compte vraiment !), cet élargissement est compensé (du moins approximativement). Ainsi, loin d'être contraignante, comme elle peut *a priori* sembler, l'altération du front d'onde par le PIAA permet en réalité de conserver tout le pouvoir résolvant de l'instrument !

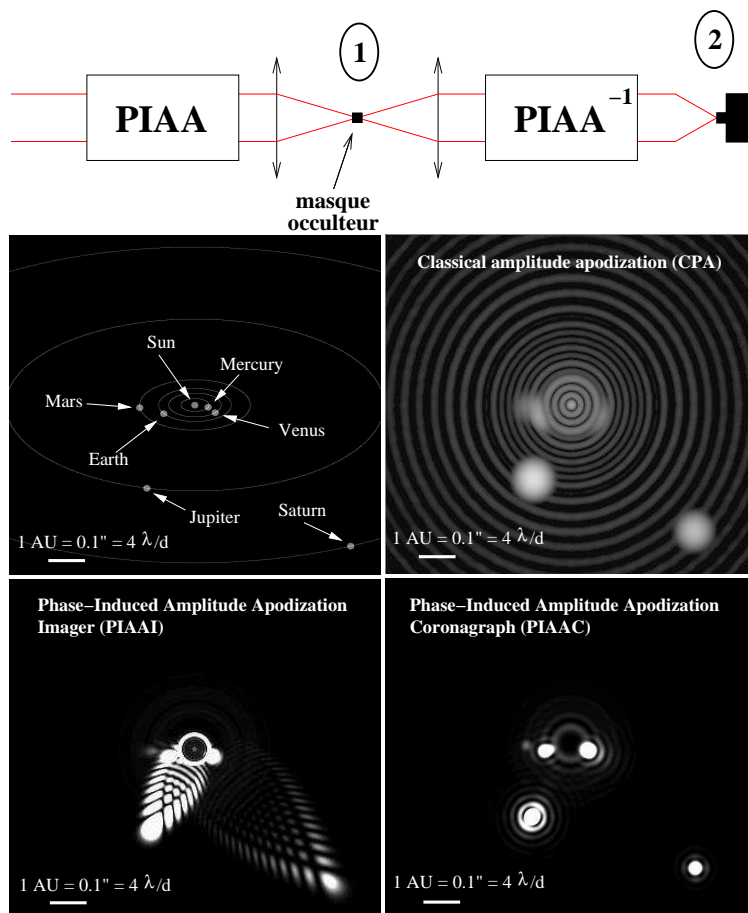


FIG. 3.5 – Image du système solaire vu à une distance de $10 pc$ par un télescope spatial de 4 mètres de diamètre observant dans le visible avec plusieurs techniques : en haut à droite avec un masque apodiseur placé dans un plan pupille, en bas à gauche au foyer direct d'un PIAA juste derrière un masque occulteur (1) et en bas à droite après restauration de la pupille par une copie du PIAA, utilisée à l'envers (2) (simulation par Olivier Guyon).

3.3 Restauration de la pupille

Comme pour les hypertélescopes, dans un champ réduit à quelques λ/d (vu du ciel!), la qualité de la FEP est tout à fait acceptable pour faire de l'imagerie directe. Néanmoins, pour recouvrir une capacité d'imagerie grand champ, [Guyon 2003] suggère, après passage par le masque occulteur, de reconfigurer la pupille pour la rendre à nouveau homothétique à la pupille d'entrée. Une illustration du gain apporté par cette reconfiguration finale est donnée à la figure 3.5. Ce montage composé d'un PIAA, d'un masque occulteur et d'un PIAA inversé est appelé PIAAC. L'évaluation des performances de ce concept fait l'objet du chapitre 5.6 de cette thèse.

3.4 Article PIAAC

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 622:744–758, 2005 March 20
 © 2005, The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in U.S.A.

EXOPLANET IMAGING WITH A PHASE-INDUCED AMPLITUDE APODIZATION CORONAGRAPH. I. PRINCIPLE

OLIVIER GUYON, EUGENE A. PLUZHNIK, RAPHAEL GALICHER, AND FRANTZ MARTINACHE
 Subaru Telescope, National Astronomical Observatory of Japan; 650 North A'ohoku Place, Hilo, HI 96720;
 guyon@subaru.naoj.org

STEPHEN T. RIDGWAY
 National Optical Astronomical Observatory, 950 North Cherry Avenue, Tucson, AZ 85726; ridgway@noao.edu

AND

ROBERT A. WOODRUFF
 Lockheed Martin Space Corporation, P.O. Box 179, Denver, CO 80201-0179
 Received 2004 October 20; accepted 2004 November 17

ABSTRACT

Using two aspheric mirrors, it is possible to apodize a telescope beam without losing light or angular resolution: the output beam is produced by “remapping” the entrance beam to produce the desired light intensity distribution in a new pupil. We present the phase-induced amplitude apodization coronagraph (PIAAC) concept, which uses this technique, and show that it allows efficient direct imaging of extrasolar terrestrial planets with a small-sized telescope in space. The suitability of the PIAAC for exoplanet imaging is due to a unique combination of achromaticity, small inner working angle (about $1.5\lambda/d$), high throughput, high angular resolution, and large field of view. Three-dimensional geometrical ray tracing is used to investigate the off-axis aberrations of PIAAC configurations and show that a field of view of more than $100\lambda/d$ in radius is available thanks to the correcting optics of the PIAAC. Angular diameter of the star and tip-tilt errors can be compensated for by slightly increasing the size of the occulting mask in the focal plane, with minimal impact on the system performance. Earth-sized planets at 10 pc can be detected in less than 30 s with a 4 m telescope. Wave-front quality requirements are similar to classical techniques.

Subject headings: planetary systems — techniques: high angular resolution — telescopes

1. INTRODUCTION

With more than 100 exoplanets now known, the scientific interest in direct detection of exoplanets is very high: unlike indirect detection techniques, it will allow characterization through spectroscopy. Of particular importance is the discovery and characterization of planets similar to ours, which are the prime candidates for detectable evidence of life outside our solar system.

The point-spread function (PSF) obtained by a telescope pupil, even in the absence of aberrations, is poorly suited for high-contrast imaging, and most high dynamical range imaging concepts therefore propose to feed the telescope beam to a coronagraph (Roddier & Roddier 1997; Rouan et al. 2000). Another approach to high dynamical range imaging is to “shape” the pupil illumination function to produce a high-contrast PSF: this technique is referred to as pupil apodization (Jacquinot et al. 1964). We will refer to these techniques as classical coronagraphy and classical apodization.

Properly apodized pupils are suitable for high dynamical range imaging. Various apodization functions or pupil shapes have been suggested to produce a PSF with very dark areas at small angular distances (Jacquinot et al. 1964; Kasdin et al. 2003; Vanderbei et al. 2003). The apodization technique offers some unique advantages over most coronagraphs:

1. It is simple and robust. It can be easily made achromatic if a binary transmission mask is used.
2. It is insensitive to the stellar angular size and tolerates small telescope pointing errors.

Unfortunately, pupil apodization is usually performed by selectively absorbing light in the pupil plane (classical pupil apodization, or CPA), which reduces both the angular resolution (typically by a factor of 3) and throughput (by about a factor of 4–10) of the telescope. Moreover, only a fraction of the field of view is usable with some apodization masks. These effects get stronger as the required PSF contrast is increased.

Alternatively, pupil apodization may be performed by geometrical remapping of the flux in the pupil plane. This technique has been commonly used for shaping the beam of lasers and to reduce the side lobes of an antenna in radio astronomy. Optical imaging with a remapped pupil was first suggested for sparse interferometric arrays to produce a single diffraction peak PSF (Labeyrie 1996; Boccaletti et al. 2000; Guyon & Roddier 2002; Riaud et al. 2002). Guyon (2003) showed that a similar method (phase-induced amplitude apodization [PIAA]) can be applied on a single-aperture telescope for high dynamical range imaging. PIAA combines the advantages of pupil apodization listed above with full throughput and no loss of angular resolution.

As shown in Figure 1, PIAA Guyon (2003) achieves an apodization of the telescope pupil by geometric redistribution of the light. Since no light is lost, the sensitivity and angular resolution of the original telescope are preserved and high-PSF contrasts (10^{10}) can be achieved within $1.5\lambda/d$ of the optical axis.

In this paper we propose a coronagraph design based on the PIAA concept for direct imaging of extrasolar terrestrial planets. The phase-induced amplitude apodization coronagraph (PIAAC)

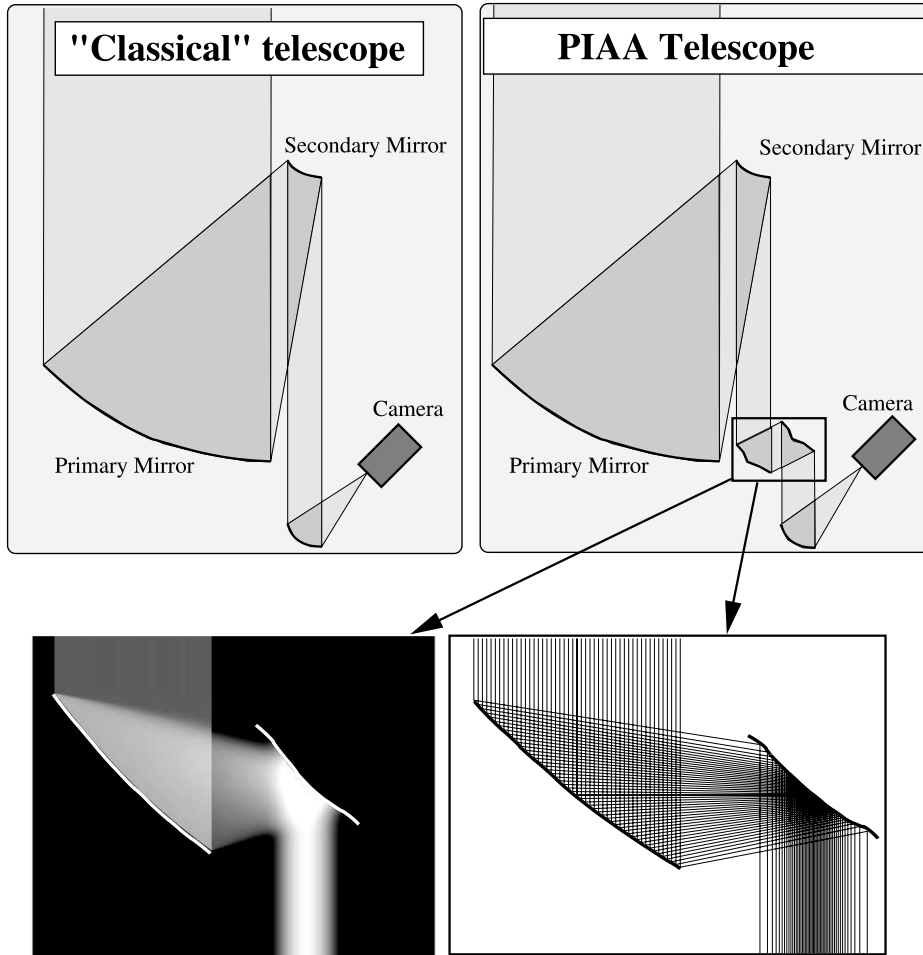


FIG. 1.—Schematic representation of a PIAA telescope.

principle is presented in § 2. In § 3 the choice of the optimal apodization function is discussed. The field of view of the PIAA is estimated with a ray-tracing model in § 4. The performance of a PIAAC system for extrasolar terrestrial planet imaging is discussed in § 5.

2. THE PHASE-INDUCED AMPLITUDE APODIZATION CONCEPTS

2.1. Optics Shapes for PIAA

In this work we only consider pupil remapping from a circular-symmetric intensity function to a circular-symmetric function. The surface brightness profiles of the entrance and exit beams are noted $I_1(r_1)$ and $I_2(r_2)$, respectively, as shown in Figure 2. The remapping function f is such that, for any value r_1 , the total flux within the radius r_1 of the entrance beam is equal to the total flux within the radius $r_2 = f(r_1)$ of the exit beam. The remapping function thus gives a correspondence between the radii in the entrance and exit beams.

For any desired pupil apodization, the shapes (z -coordinate along the optical axis of the system) M_1 and M_2 of the mirrors

for an afocal on-axis optical configuration are given by a differential equation (Guyon 2003):

$$\frac{dM_1}{dr_1} = \frac{dM_2}{dr_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{r_1 - r_2}\right)^2} - \frac{M_2 - M_1}{r_1 - r_2}. \quad (1)$$

The first equality in this equation guaranties that no phase aberration is introduced by the system for an on-axis point source, and the right-hand term insures that the beam is properly apodized. This equation can also be written independently for each optical element (Traub & Vanderbei 2003). The optics shapes for off-axis afocal remapping with a noncircular symmetric beam can be obtained by solving a similar differential equation in two dimensions:

$$\frac{dM_1}{dx_1} = \frac{dM_2}{dx_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{x_1 - x_2}\right)^2} - \frac{M_2 - M_1}{x_1 - x_2}, \quad (2)$$

$$\frac{dM_1}{dy_1} = \frac{dM_2}{dy_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{y_1 - y_2}\right)^2} - \frac{M_2 - M_1}{y_1 - y_2}, \quad (3)$$

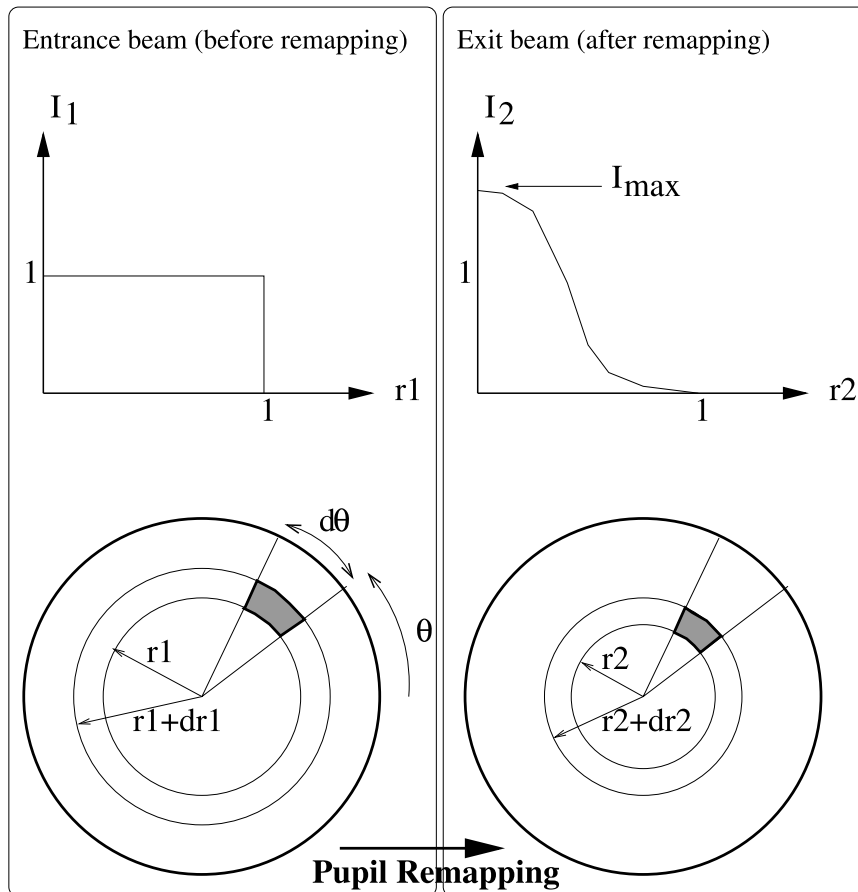


FIG. 2.—Notations adopted in the paper for remapping of a pupil element in polar coordinates.

where (x_1, y_1) and (x_2, y_2) are the coordinates of a light ray in the entrance- and exit-collimated beams.

The optics shapes obtained are aspheric and can be difficult to polish to a high level of accuracy. The outer edge of the first mirror (M1) is especially challenging to polish, because it has a small (and rapidly changing) radius of curvature: the light of the incoming pupil that is in the last percent or so of the radius needs to be spread over a large area in the exit pupil.

Several solutions exist to relax the requirements on the accuracy of the optics surfaces, and they can be employed independently or in combination:

1. *Using one or several deformable mirrors (DMs).*—Errors on the surface of the PIAA optics produce both phase and amplitude errors in the exit beam. Using a single DM to restore the correct phase relaxes the surface accuracy requirement of the PIAA optics by a factor of 100, approximately. With more than one DM, amplitude errors can also be corrected and the system can tolerate even larger surface errors.

2. *Using more than two mirrors to remap the pupil.*—Since the most challenging feature of the optics is a sharp bend at the outer edge of the first mirror, it is possible to design a system that performs the pupil remapping in two steps (three mirrors) or more. In each step, the apodization to be performed is milder, and so is the bend at the outer edge of the mirrors.

3. *Combining PIAA and classical apodization.*—Another solution to make the bend milder is to achieve a mild apodization with PIAA and then use a classical apodization mask to further reduce the intensity of the edges of the apodized pupil. Since this mask would only affect the faint outer edges of the remapped pupil, it would offer the benefits of apodization without significant accompanying throughput and resolution losses.

Since all three options have a minimal negative impact on the performance of the PIAA system, the results presented in this paper also apply to PIAA systems using one or several of the above options.

2.2. The Phase-induced Amplitude Apodization Imager (PIAAI)

The simplest implementation of pupil remapping on a telescope is the phase-induced amplitude apodization imager (PIAAI), shown in Figure 3 (*top*): the pupil is apodized by two mirrors, and a focal plane image is then acquired. The PIAAI is very efficient for exoplanet imaging (Guyon 2003) and offers a combination of advantages unique among high dynamical range imaging systems:

1. *High-contrast PSF.*—The apodization profile can be chosen to yield PSF contrasts better than 10^{10} .

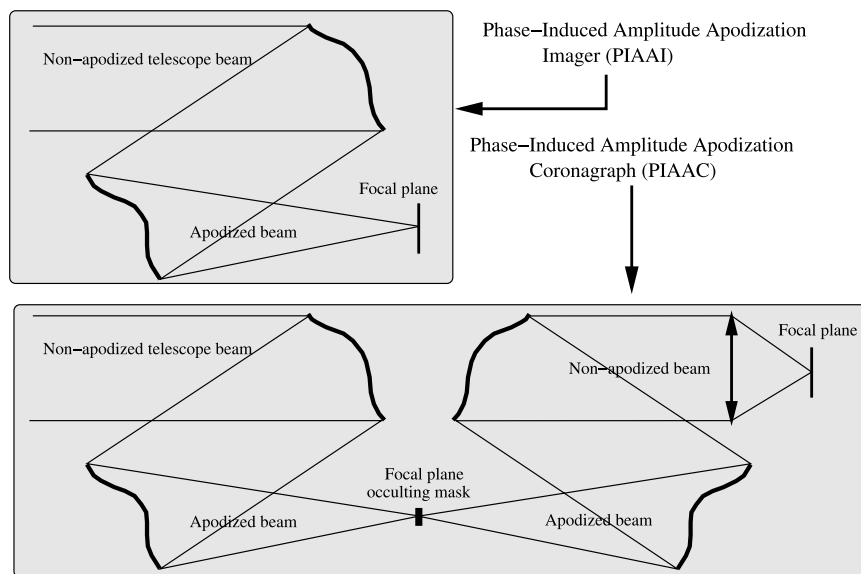


FIG. 3.—Schematic representation of the PIAAI and PIAAC.

2. *100% throughput.*—Apodization does not remove light from the system; the flux sensitivity and full angular resolution of the telescope are preserved.

3. *Small inner working angle.*—A 10^{10} PSF contrast can be achieved at less than $2\lambda/d$ from the optical axis.

4. *Achromaticity.*—Since the PIAAI uses mirrors and geometrical optics to perform the apodization, it is achromatic.

5. *Low sensitivity to pointing errors.*—The PIAAI behaves like a classical imaging telescope: pointing errors, or the angular size of the central source, will slightly broaden the PSF core without increasing the light level in the PSF wings.

However, geometrical redistribution of the light in the pupil plane comes at the cost of a reduced isoplanatic field of view. As shown in Figure 4, it is impossible for a pupil remapping system to produce a pure tilted wave front for off-axis sources. This

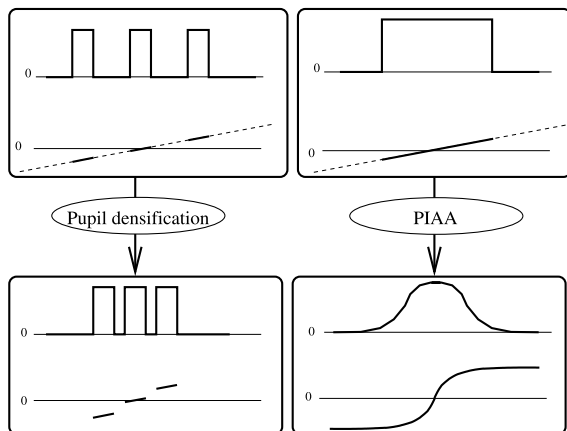


FIG. 4.—Effect of pupil remapping on the intensity (top graph in each square) and phase (bottom graph in each square) for an off-axis source. For both interferometers (left) and single-pupil telescopes (right), the wave front after remapping is no longer a flat, tilted plane.

law applies to both interferometers (Labeyrie et al. 1996) and monolithic pupils (Guyon 2003; Soummer et al. 2003; Traub & Vanderbei 2003) and prevents the PIAAI from directly forming good-quality wide-field images.

Since the apodized pupil is created by “concentrating” light in the central part of the pupil and “diluting” light in the outer parts of the pupil, the phase slope is amplified in the central part while it is decreased toward the edges. The image of an off-axis source is therefore distorted: the central part of the pupil (where the phase slope is the strongest) creates a diffraction peak far from the optical axis, while the fainter outer parts of the pupil (low phase slope) create a PSF “tail” pointed toward the optical axis (this correspondence between phase slope in the remapped pupil and structures in the off-axis PSF is illustrated in Fig. 5 and detailed in § 3.3).

At small angular distances, the PSF aberrations are moderate and do not have a strong impact on the detection sensitivity for extrasolar terrestrial planet imaging at less than about $5\lambda/d$. However, at larger separations, the light of the planet is spread over a wide area, and the amount of background light (from the central star, the zodiacal light, the exozodiacal light, and possibly from images of other sources in the field) mixed with the signal reduces sensitivity. In the next section we demonstrate that this limitation can be overcome at a minimal cost.

2.3. The Phase-induced Amplitude Apodization Coronagraph

Since the PIAAI concentrates the central starlight in a single diffraction peak, with very little energy outside this peak, an occulting mask may be placed in the PIAAI’s focal plane to efficiently remove starlight. The light of an off-axis source is not blocked by the mask, and a coronagraphic effect is therefore produced. More importantly, the beam may be de-apodized after this occulting mask to remove the off-axis wave-front distortion introduced by the pupil remapping. This design, denoted PIAAC, is shown in Figure 3 (bottom). The PIAA technique is then only used to create an intermediate focal plane in which the light of the central star can be efficiently masked. If the occulting mask is removed, or if the source is sufficiently off-axis, the

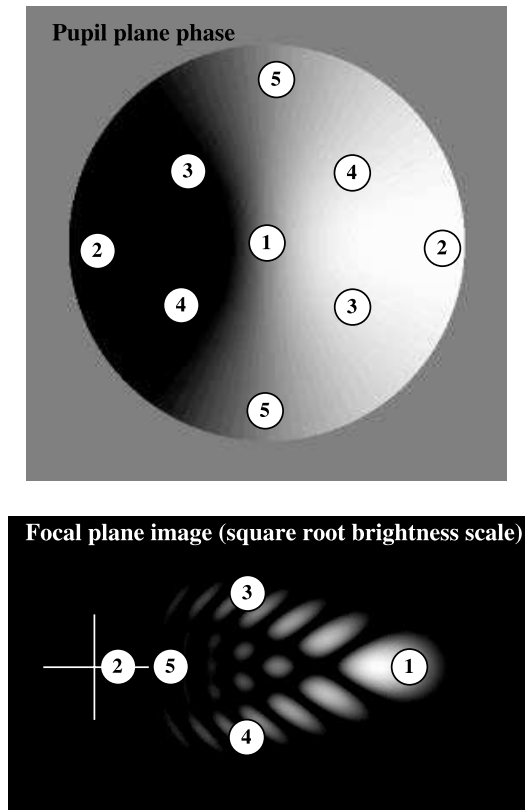


FIG. 5.—Pupil phase map (top) and PSF (bottom) for an off-axis source at $10\lambda/d$ from the optical axis. The position of the optical axis in the focal plane is shown as a white cross in the PSF image. Numbers from 1 to 5 are used to show the correspondence between regions of the pupil and features in the off-axis PSF.

effects of the two sets of optics cancel one another and an Airy pattern is obtained in the focal plane. The same solution had been previously proposed (Guyon & Roddier 2002) to restore a wide field of view in a coronagraphic interferometer.

The PIAAC offers several improvements over the PIAAI:

1. *Wider field of view.*—The off-axis PSF aberrations of the PIAAI limit the usable field of view. This effect is mitigated by the corrective optics included in the PIAA, allowing a field of view of about $100\lambda/d$ in radius.
2. *Removal of the central star's flux.*—The PIAAI concentrates the stellar flux in one single diffraction peak but does not remove it from the image. Since the PIAAC efficiently blocks most of the stellar flux, a low dynamic range focal plane detector array can be used at the reimaged focus.
3. *Smaller inner working distance.*—The PIAAC is very efficient at removing the light of the central source and transmitting light of a companion, even if the two PSFs partially overlap in the first focal plane. In the PIAAI, the separation of two overlapping PSFs is less efficient because it relies on the focal plane detector, which has to overcome high dynamic range and limited pixel scale.
4. *Sharper PSF.*—The off-axis PSF of the PIAAC is as small as the telescope's diffraction allows ($\approx\lambda/d$), even at small distance from the optical axis. A minimal amount of background signal (thermal background, zodiacal, and exozodiacal light) is therefore mixed with the companion's image.

Since the additional optics required to build the PIAAC are after the occulting mask (where most of the central starlight has been removed), they do not need to be of high optical quality and their alignment is not as critical as the coronagraphic optics. The advantages offered by the PIAAC over the PIAAI therefore come at a small additional cost.

3. APODIZATION PROFILE AND INNER WORKING ANGLE

3.1. Definition of the Inner Working Angle (IWA)

In a classical apodized pupil imager, the apodization function is chosen to (1) minimize the inner working angle (smallest angular separation at which a companion, of a given contrast with the central source, can be “easily” detected), (2) maximize throughput, (3) maximize the outer working angle, and (4) maximize the fraction of the field of view suitable for high-contrast detection. The PIAAC enjoys 100% throughput, large outer working angle (the apodization is continuous), and full usable field of view. The choice of the apodization function is therefore driven only by the inner working angle, which is used as a metric of the PIAAC apodization function performance.

The inner working angle is a function of the contrast level to be achieved and can be denoted IWA_C , where C is the base 10 logarithm of the contrast. For direct terrestrial exoplanet imaging, a suitable PSF contrast level is 10^{10} , and we shall therefore use IWA_{10} as a metric for how close to the optical axis detection of terrestrial exoplanet is possible.

In an imaging system with a translation-invariant PSF, measuring the IWA_{10} is straightforward: it is the angle from the optical axis at and beyond which the PSF profile is below 10^{-10} of its peak surface brightness.

This definition is, however, not suitable for the PIAAC (and other coronagraphs), since, at the contrast level considered, no light of the central star is left in the focal plane. In a classical coronagraph, the throughput is a function of the angular separation with the optical axis, and the IWA is therefore defined by imposing a minimum required coronagraphic throughput T . For easy comparison between coronagraphs and apodized pupil imagers, this threshold value should be chosen to be approximately equal to the throughput of a classical apodizer designed to reach similar contrast level at small IWA ($3\lambda/d-4\lambda/d$). In this work, we adopt $T = 0.1$ as the threshold transmission to define the IWA.

3.2. Focal Plane Scale

By analogy with pupil densification of interferometric arrays (Labeyrie 1996), there are two equivalent representations of pupil apodization with a PIAA system:

1. The apodized pupil is obtained by concentrating flux in the inner part of the pupil, but the pupil diameter is conserved. At the center of the pupil, the phase slope of an off-axis source is amplified by the remapping.
2. The pupil surface brightness is conserved at the pupil's center, but the light is spread over a wider area in the apodized pupil: the apodized pupil is larger than the entrance pupil. At the center of the pupil, the phase slope of an off-axis source is identical in the entrance and exit (apodized) pupils of the PIAA system.

With representation 2, the focal scale, if measured at the center of the pupil (“principal ray”), is preserved by the pupil remapping, which is convenient for defining a focal scale in the first focal plane of the PIAAC. This definition is, however, not

exact since the phase slope of an off-axis source is not constant in the apodized pupil. We have chosen to adopt representation 1 in this work to simplify notations, which gives us two options for defining the focal scale:

1. *Ignoring the phase slope amplification effect.*—The focal scale is measured as if the apodized beam were obtained by classical apodization and would preserve the phase slope of off-axis sources. In a system of focal length F , $F(\lambda/d)_0$ is the physical distance in the focal plane that would separate the images of two sources separated by λ/d in the sky if the apodized beam were obtained by classical apodization. In this paper, we omit F and use $(\lambda/d)_0$ as a unit of distance in the focal plane. This unit does not correspond to an angular distance on the sky (because PIAA does not preserve the phase slope of off-axis sources), but it can be easily obtained mathematically through Fourier transform of a remapped pupil.

2. *Adopting a physically meaningful focal scale from the principal ray of the system.*—The focal scale can be measured in the focal plane from the displacement of the principal ray (the light ray at the center of the pupil) of the system for a source in the sky at a known angular distance from the optical axis. We use $F(\lambda/d)_s$ (in the rest of the paper, we omit F) to denote this displacement in the focal plane for a source, which is moved by λ/d in the sky. Considering only the principal ray does not, however, take into account the change of PSF shape with separation.

With conventional imaging, the image scale is unambiguously determined by the mapping between imaged points. In PIAA the ambiguity of image scale can be associated with the distorted PSF (which in PIAAI is a feature, not an aberration). Lacking a well-defined image center for the PSF, the scale is not simply determined. The scale $(\lambda/d)_s$ corresponds to what appears as the offset “core” of the PSF, corresponding approximately to the intensity peak, not a weighted mean.

As will be demonstrated in the next section, with the notations adopted in this paper (see Fig. 2), for a “smooth” apodization profile,

$$(\lambda/d)_s = \sqrt{I_{\max}}(\lambda/d)_0. \quad (4)$$

The ratio between the two scales corresponds to the “angular magnification” factor defined by Traub & Vanderbei (2003) and can be a source of confusion when attempting to measure the IWA in a PIAAI system. We therefore use both $(\lambda/d)_0$ and $(\lambda/d)_s$ in this paper to measure size of features in the intermediate focal plane of the PIAAC; $(\lambda/d)_s$ is preferentially used to measure the occulting mask size since it is closely related to the IWA of the system.

Fortunately, in the PIAAC, the output pupil (after the second pupil remapping) of the system is similar to the pupil of a classical telescope: the phase slope of an off-axis source is constant across the pupil and the PSF is invariant by translation. There is no focal scale problem in the final focal plane of the PIAAC, and the classical λ/d scale is then used.

3.3. Optimizing the Apodization Profile

In the PIAAC, the focal plane mask blocks the central diffraction peak, and the transmission of the coronagraph for an off-axis source is approximately the fraction of the off-axis PSF flux that “misses” this mask.

While a rigorous diffraction simulation of the coronagraph is needed to compute the throughput for off-axis sources, we use in this section a diffraction/ray-tracing approximation to show that the optimization problem is quite different than for the

choice of an apodization function in classical apodization. The notations adopted in the pupil plane are shown in Figure 2, and we denote the remapping function by f , such that $r2 = f(r1)$, and $f'(r1) = df(r1)/dr1$ denotes its derivative.

The size of the central diffraction peak in the image of an on-axis source in the first focal plane is the basis for defining the size of the occulting mask. We denote by α_0 the radius of this mask [in units of $(\lambda/d)_0$], which is equivalent to the classical definition of the inner working distance for a classically apodized pupil imaging telescope. The phase in the entrance pupil of the PIAAC is a flat, tilted wave front for an off-axis source. The slope of this wave front is denoted $S/1$ (normalized such that it is equal to 1 for an angular distance of λ/d on the sky) and is aligned with the x axis ($\theta = 0$ in polar coordinates). As can be seen in Figure 2, the remapping amplifies the radial slope (equal to $S/1 \cos \theta$) by $1/f'(r1)$ and the angular slope (equal to $S/1 \sin \theta$) by $r1/f(r1)$. Therefore, after remapping, for the pupil element shown in Figure 2, the slopes along the x - and y -axes are

$$S/2_x(r1, \theta) = S/1 \left[\frac{\cos^2 \theta}{f'(r1)} + \sin^2 \theta \frac{r1}{f(r1)} \right], \quad (5)$$

$$S/2_y(r1, \theta) = S/1 \cos \theta \sin \theta \left[\frac{1}{f'(r1)} - \frac{r1}{f(r1)} \right]. \quad (6)$$

According to equation (6), the remapping introduces a wave-front slope along the axis perpendicular to the direction defined by the position of the off-axis source. This effect can be seen in the PIAAI images as a broadening of the off-axis PSF tails along the radial direction (Fig. 5).

For each pupil element, the corresponding light ray will intersect the focal plane at a distance $d(r1, \theta)$ from the center of the mask:

$$d(r1, \theta) = \sqrt{[S/2_x(r1, \theta)]^2 + [S/2_y(r1, \theta)]^2}, \quad (7)$$

$$d(r1, \theta) = S/1 \sqrt{\left[\frac{\cos \theta}{f'(r1)} \right]^2 + \left[\frac{\sin(\theta)r1}{f(r1)} \right]^2}. \quad (8)$$

Since $S/1$ is normalized to the slope of a source at a separation equal to λ/d , $d(r1, \theta)$ is expressed in units of $(\lambda/d)_0$. $d(r1, \theta)/S/1$ represents the factor by which the phase slope in the entrance pupil has been multiplied by the pupil remapping. As shown in Figure 6 (*bottom left*), it is at maximum at the center of the pupil (where the light needs to be concentrated) and at minimum at the edges of the pupil (where light needs to be diluted to produce the required apodization profile).

The occulting focal plane mask acts as a “wave-front slope high-pass filter,” since it will block the light of pupil elements for which $d(r1, \theta)$ is smaller than α_0 . The transmission of the coronagraph for an off-axis source is therefore obtained by the following integration over the entrance pupil ($0 < r1 < 1$, $0 < \theta < 2\pi$) of the coronagraph:

$$T = \frac{1}{\pi} \int_{r1, \theta} H \left[\frac{d(r1, \theta)}{\alpha_0} \right] r1 dr1 d\theta, \quad (9)$$

where $H(x)$ is equal to 1 if $x > 1$ and equal to 0 if $x < 1$.

If the pupil remapping preserves the original pupil [$f(r1) = r1$, $f'(r1) = 1$, $S/2_x = S/1$, $S/2_y = 0$], $d(r1, \theta) = S/1$, and T is therefore equal to 1 if $S/1 > \alpha_0$ and to 0 if $S/1 < \alpha_0$: the inner

750

GUYON ET AL.

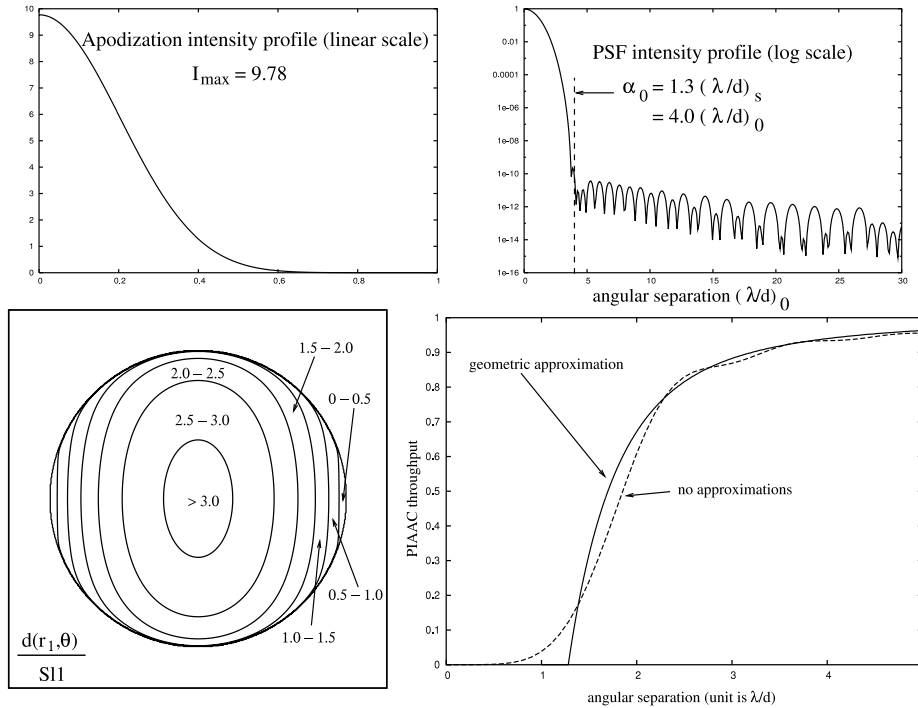


FIG. 6.—Apodization profile (top left) obtained with the optimization scheme described in the text. The corresponding PSF intensity profile (top right) has an intrinsic inner working angle of $4 (\lambda/d)_0$ [$1.3 (\lambda/d)_s$ on the sky]. For this profile, the factor by which the pupil phase slope is amplified is shown (bottom left) on the entrance pupil of the system. The throughput computed from this map (“geometric approximation” curve; bottom right) agrees well with the true throughput of the PIAAC coronagraph.

working distance is then equal to α_0 , just as for a classical apodizer.

The example of $d(r_1, \theta)/S11$ given in Figure 6 (bottom left) shows that as a point source is moved farther away from the optical axis, the central zone of the entrance pupil (which also corresponds to the central zone of the exit pupil) is first transmitted by the coronagraph. At large separations, the full pupil is transmitted and the PIAAC throughput is close to 100%, as shown in Figure 6 (bottom right). There is a very good agreement between the true throughput of the PIAAC (obtained by taking into account diffraction) and the estimation obtained by equation (9).

For an apodization profile that has a maximum surface brightness I_{\max} (normalized to the entrance pupil surface brightness) at its center, the PIAAC will start to transmit the light of an off-axis source when the phase slope in the central part of the apodized pupil exceeds α_0 . If the apodization profile is smooth, the following approximations are valid in the central part of the pupil:

$$f(r_1) \approx \frac{r_1}{\sqrt{I_{\max}}}, \quad (10)$$

$$f'(r_1) \approx \frac{1}{\sqrt{I_{\max}}}. \quad (11)$$

From equations (8), (10), and (11), we can write

$$d(r_1, \theta) \approx S11 \sqrt{I_{\max}}. \quad (12)$$

From equations (9) and (12), we can estimate the approximate value of the inner working angle according to our diffraction/ray-tracing study:

$$\text{IWA}[\lambda/d] \approx \frac{\alpha_0 [(\lambda/d)_0]}{\sqrt{I_{\max}}} \approx \alpha_0 [(\lambda/d)_s], \quad (13)$$

where $\text{IWA}[\lambda/d]$ is expressed in units of λ/d , and $\alpha_0 [(\lambda/d)_0]$ and $\alpha_0 [(\lambda/d)_s]$ are the radius of the occulting mask expressed in units of $(\lambda/d)_0$ and $(\lambda/d)_s$, respectively. This important result shows that the inner working angle is approximately equal to the ratio of the “classical” definition of the inner working angle of an apodizing profile to the square root of the central brightness of this profile. This factor is the “effective angular magnification” factor obtained by numerical simulations by Traub & Vanderbei (2003). In a classical apodizer, $I_{\max} = 1$, and $\text{IWA} = \alpha_0 [(\lambda/d)_0]$, but in the PIAAC, $I_{\max} > 1$ (light is concentrated in the central part of the apodized pupil), and the inner working angle can therefore be smaller than $\alpha_0 [(\lambda/d)_0]$.

To find the optimal apodization profile for the PIAAC, the “classical” inner working angle α_0 needs to be minimized and the central brightness I_{\max} needs to be maximized: these two requirements are somewhat opposite, as increasing I_{\max} usually also increases α_0 . In the usual “classical” apodization profile optimization, where $I_{\max} = 1$, only α_0 is to be minimized.

3.4. Results of the Optimization

An iterative optimization algorithm was used to find an apodization profile suitable for the PIAAC. The algorithm,

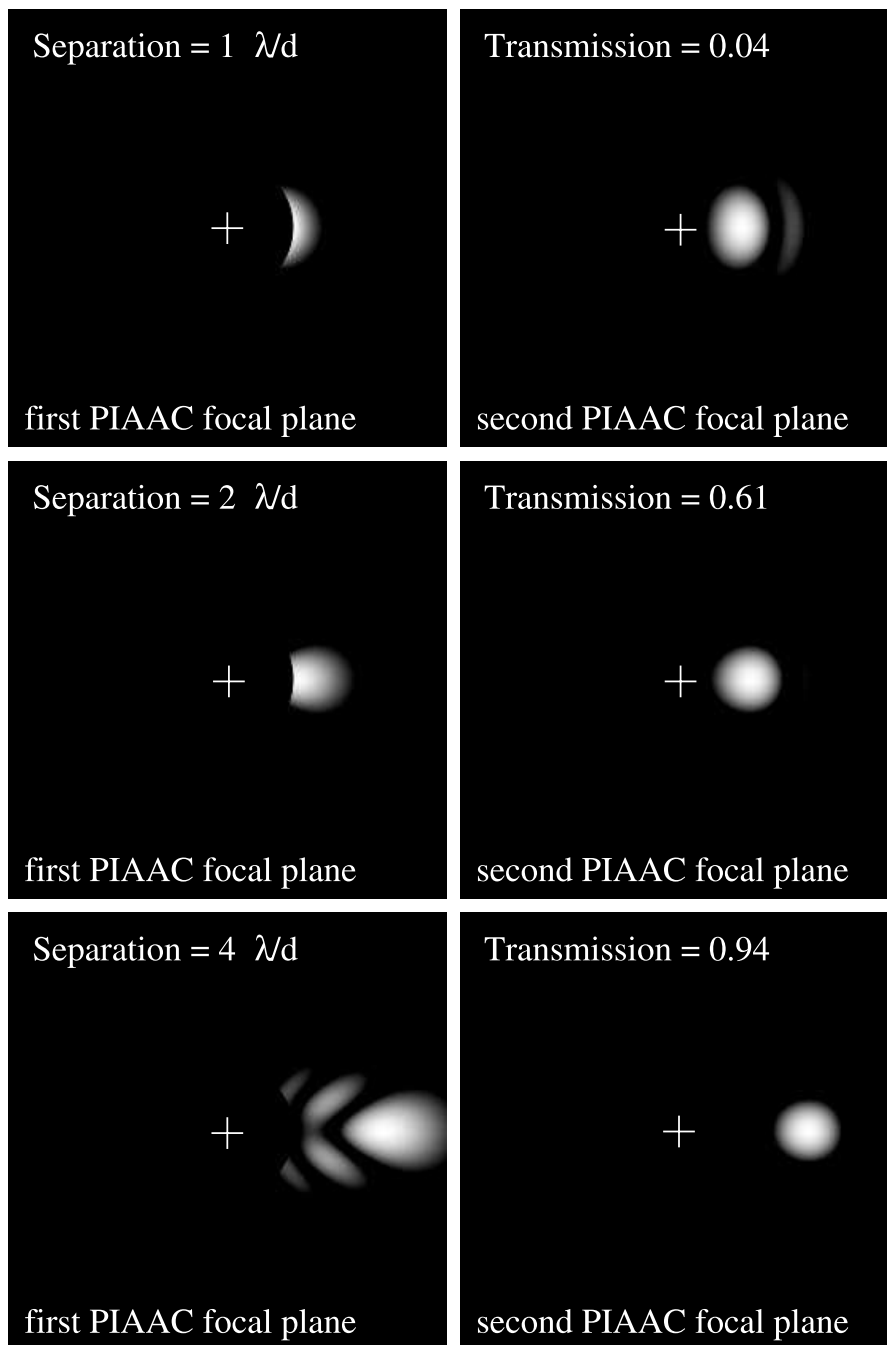


FIG. 7.—Light intensity distributions in the first focal plane (immediately after the occulting mask) of the PIAAC (*left*) and in the second focal plane (*right*) for off-axis sources at $1\lambda/d$, $2\lambda/d$, and $4\lambda/d$ from the optical axis. The white cross indicates the position of the optical axis.

752

GUYON ET AL.

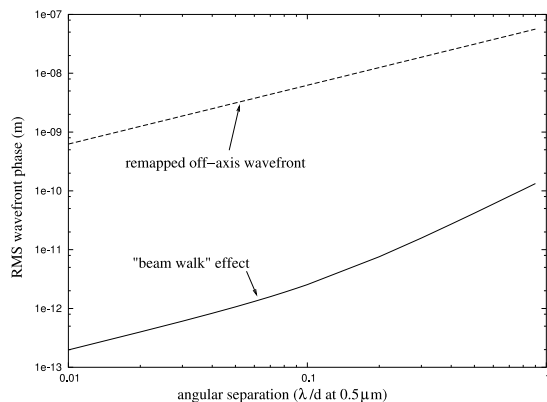


FIG. 8.—The rms wave-front quality of the “beam walk” phase mode as a function of angular separation of the source to the optical axis. For comparison, the rms wave-front quality of the remapped beam is also shown. In both cases, the wave front was intensity-weighted prior to computation of the rms wave-front phase.

which is similar to the one used in a preliminary study of the PIAAI (Guyon 2003), computes α_0 (using Fourier optics) and the scaling factor $[(I_{\max})^{1/2}]$ at each iteration. A “smoothness” constraint is imposed on the pupil to prevent the optimization algorithm from maximizing $(I_{\max})^{1/2}$ by producing a narrow peak in the apodization profile. Such a narrow peak would increase $(I_{\max})^{1/2}$ without improving the IWA of the system, because it would contain a small fraction of the total light.

The profile obtained by this optimization is shown in Figure 6. The parameters of this apodization are $\alpha_0 = 4.0(\lambda/d)_0$ and $I_{\max} = 9.73$. The profile is very close to a prolate spheroidal function, and no significant performance difference was found between the apodization profile delivered by the optimization algorithm and a prolate spheroidal function of similar width. The prolate spheroidal function seems to be the optimal solution for both classical apodization and PIAA. The main benefit of the PIAA is that it does not suffer from loss of angular resolution or throughput that the prolate spheroidal function would produce in a classical apodization. Therefore, with the PIAA, an even larger region of the extended wings of the prolate spheroidal function could be included in the apodization profile without loss of performance: the scale of the apodization function becomes irrelevant.

4. FIELD OF VIEW ABERRATIONS IN THE PIAAC

4.1. Off-Axis PSFs Close to the Optical Axis

As a point source is moved away from the optical axis of the PIAAC, its image in the first focal plane will simultaneously drift outside the occulting mask and become distorted because of the field aberrations of the PIAAI (Fig. 7). In the final focal plane of the PIAAC, the image of an off-axis source far from the optical axis is the Airy pattern, and no light is blocked by the occulting mask. However, for sources at separations comparable to the IWA, the PSF shape, as well as the throughput, are affected by the occulting mask. Figure 7 (right) shows the shape of the PSF for off-axis sources. The PSF is elongated around the optical axis for small separations (less than $2\lambda/d$) and rapidly becomes very close to the Airy pattern beyond $2\lambda/d$.

The effect of the occulting mask in the image is therefore very localized, and the PSF of sources outside the IWA is not broader

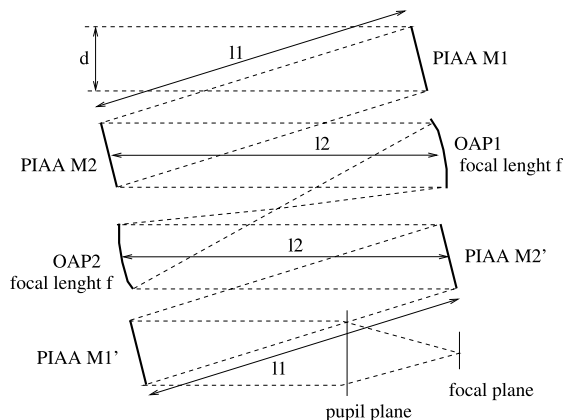


FIG. 9.—Geometry of the PIAAC system used for the ray-tracing simulation. Beam diameter d is 75 mm, the distance l_1 between the PIAA mirrors is $15d = 1125$ mm, the focal f of the OAPs is $5.33d = 400$ mm, and the distance l_2 between the OAPs and the PIAA mirrors was set to $2.67d = 200$ mm (see Fig. 10) and $9.6d = 720$ mm (see Fig. 11).

than the diffraction limit of the telescope. The PIAAC efficiently removes the light of the central source while delivering a high-quality image of the rest of the field.

4.2. Narrow Field Approximations

We have assumed so far that the PIAA is a “pure remapping” system: the PIAA output pupil is obtained by remapping the phase and amplitude of the PIAA entrance pupil. As shown in Figure 2, the PIAA system is then entirely defined by the remapping function f , which gives the correspondence between points in the entrance and exit pupils. This assumption is valid for an on-axis point source (the optics shapes have been designed for this case), but it is only an approximation for off-axis sources. Phase and amplitude aberrations appear as the tilt angle of the incoming light rays becomes sufficient to move the impact point of light rays on the surface of the optics (“beam walk” effect).

We have measured, through numerical simulation (three-dimensional ray tracing on the surface of the optics), the deviation from “perfect” pupil remapping in a real system. The main effect produced by beam walk is to superpose a low-order phase mode on the wave front exiting the PIAA system. As shown in Figure 8, the rms amplitude of this mode increases with the source’s angular separation from the optical axis. For separations below $0.1\lambda/d$, the phase aberration induced by the beam walk effect is about 3000 times smaller than the remapped tip-tilt phase map. This effect has therefore no significant impact on the sensitivity of the PIAAC to angular stellar size and pointing errors.

4.3. Wide Field of View with the PIAAC

The PIAAC uses a second set of aspheric optics to cancel the off-axis aberrations introduced by the pupil remapping. The beam walk effect described above also limits the field of view within which the aberration induced by the first set of optics can be canceled with a second set of optics. We have used a three-dimensional ray-tracing simulation to simulate this effect. Figure 9 shows the geometry of the PIAAC system adopted for this test.

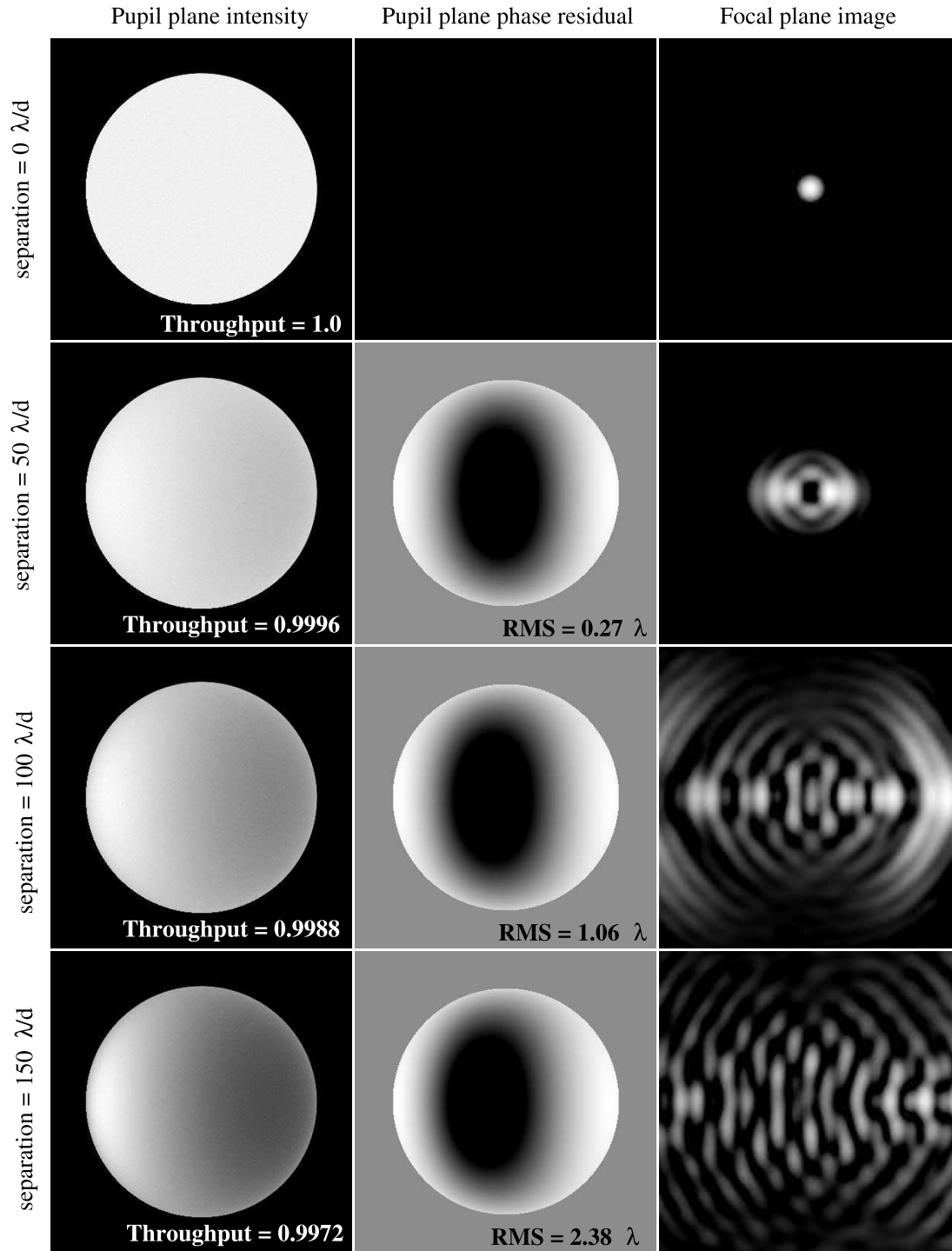


FIG. 10.—Pupil plane intensity (*left column*), phase (*center column*), and corresponding PSF (*right column*) for off-axis sources with the PIAAC. The tip-tilt mode has been removed from the phase map to show the off-axis aberrations introduced by the PIAAC. The wavelength is $0.5 \mu\text{m}$ in this monochromatic simulation.

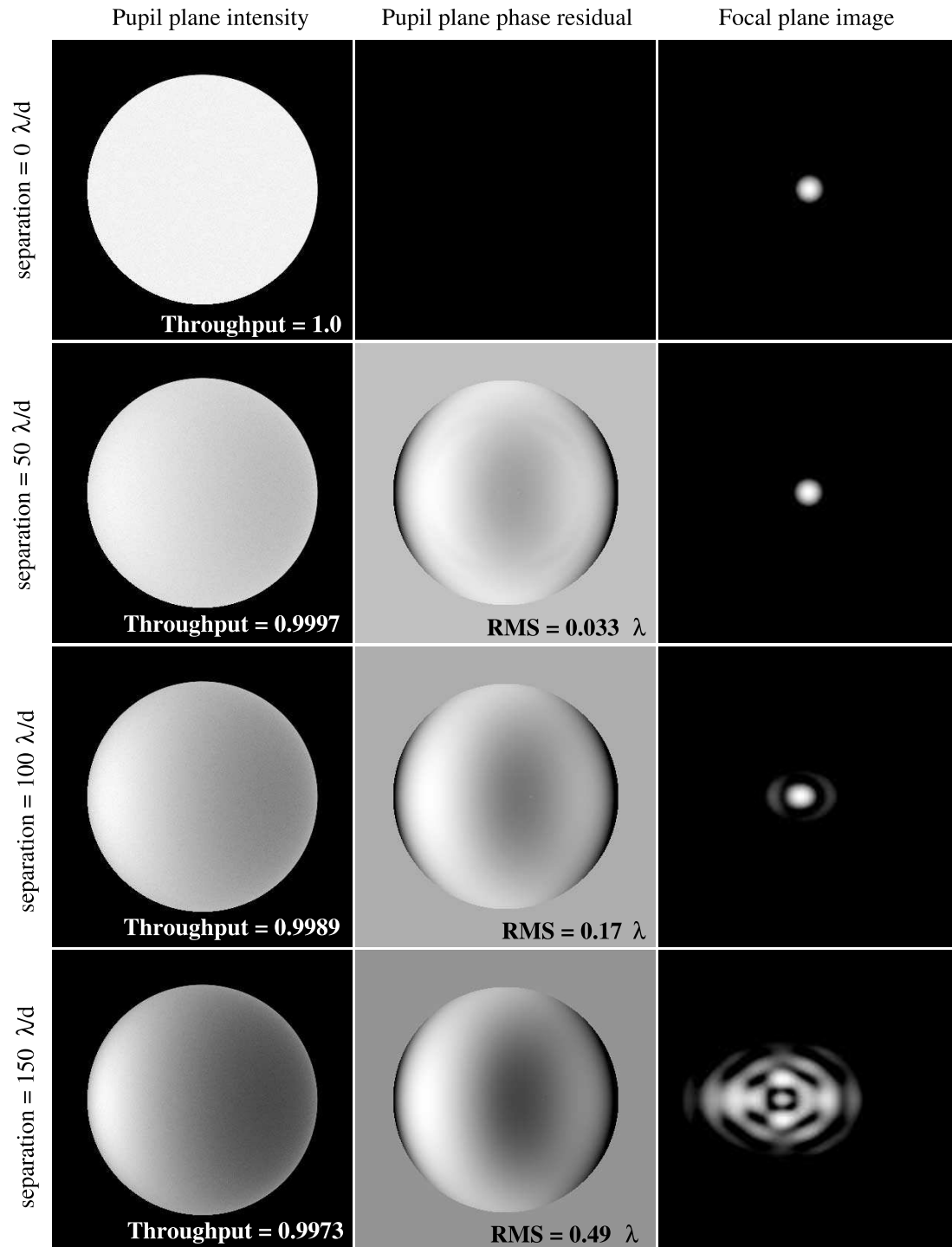


FIG. 11.—Same as Fig. 10, but with a different value for D . Here D has been chosen to maximize the image quality for off-axis sources.

We first tested this geometry with a distance l_2 between the off-axis parabolas (OAPs) and the PIAA mirrors set to $2.67 \times d = 200$ mm (see Fig. 10). The results show that the field of view under this configuration is less than $50\lambda/d$ in radius: the beam walk effect is rapidly broadening the PSF at and outside this radial distance.

This configuration is, however, not optimal, and we have then adopted the distance l_2 between the OAPs and PIAA mirrors, which maximizes the field of view: $9.6 \times d = 720$ mm. As shown in Figure 11, the field of view is then increased to more than $100\lambda/d$ in radius. For the second set of PIAA mirrors to cancel the first set over a large field of view, the PIAA mirrors in the first set should be conjugated to the corresponding mirrors in the second set. While this cannot be achieved with the optical configuration shown in Figure 9 (additional mirrors would be required to conjugate M1 to M1' and M2 to M2'), 1 degree of freedom (value of l_2) is sufficient to more than double the field of view of the system. With more optical elements and more degrees of freedom, a wider field of view may be achieved.

5. SYSTEM PERFORMANCE

5.1. Compatibility with Telescope Pupil Shapes

A telescope pupil with a central obstruction may be remapped into an apodized pupil without central obstruction, and a PIAAC can therefore be built for a on-axis telescope. Just as for the concept presented so far, the IWA and contrast level would be suitable for direct imaging of Earth-sized planets. However, as shown in Figure 12, the remapping of the central obstruction produces a phase discontinuity in the wave front of off-axis sources. At the 10^{10} contrast level required to detect Earth-sized planets, this effect makes the PIAAC too sensitive to pointing error and stellar diameter unless the central obstruction is made very small. The same effect imposes constraints on the thickness of the spider vanes needed to support the secondary mirror.

It is, however, possible to apodize both the outer edge and the inner edge of a pupil with a central obstruction, but the IWA for Earth-sized planet detection is then significantly larger.

Elliptical telescope pupils can easily be remapped into circular pupils (with “cylindrical” optics), which can themselves be remapped to be suitable for high-contrast imaging. These two remapping steps can be combined into one, and the PIAAC concept presented in this paper can be generalized to elliptical apertures.

5.2. Sensitivity to Low-Order Aberrations and Focal Plane Mask Size

Phase aberrations in the entrance beam yield a PSF that “overfills” the occulting mask in the first focal plane of the PIAAC. Low-order aberration broadens the central diffraction peak of the PSF without significantly increasing the faint PSF wings. Increasing the size of the occulting mask therefore makes the PIAAC quite insensitive to low-order aberrations, including tip-tilt and focus, as shown in Figure 13.

Even in the absence of low-order aberrations, the focal plane mask size needs to be increased because of the angular diameter of the central star. A Sun-like star at 5 pc is 1 mas in radius. On a 4 m telescope at $0.5 \mu\text{m}$, this corresponds to $0.04\lambda/d$. As shown in Figure 12, with a pointing error equal to $0.04\lambda/d$ and a mask radius 40% larger than the nominal size, the contrast level is better (by about a factor of 10) than the 10^{10} requirement at all angular separations larger than the IWA.

This 40% increase in the mask size increases the IWA by 50%, from $1.2\lambda/d$ to $1.8\lambda/d$. With the definitions of IWA and

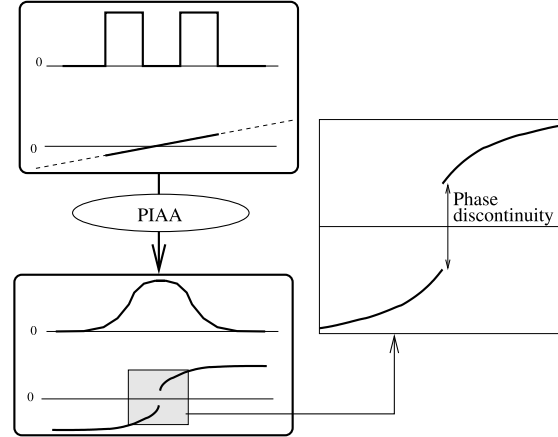


FIG. 12.—Effect of a central obstruction in the remapping of an off-axis source wave front by the PIAA. A phase discontinuity appears because of the “filling” of the central obstruction.

focal scale $(\lambda/d)_s$ adopted in this work, the radius of the occulting mask is approximately equal to the IWA of the PIAAC system.

The stars that have the largest angular diameter tend to be closer, and their habitable zone (the distance range from the central star where life as we know it might appear) is consequently at larger angular separation. There is therefore little penalty in increasing the IWA of the PIAAC by 50% or so for those systems. However, the IWA should be kept small for distant (more than 10 pc) stars, and it would be advantageous to be able to “tune” the occulting mask size for each observation.

Since the PSF scale is wavelength-dependent, the mask size should be chosen to accommodate the longest wavelength seen by the detector. Since there is no penalty (other than an increase of IWA) in increasing the mask size, the contrast level is still maintained over the full spectral bandwidth, and the PIAAC does not suffer from chromatism, as many coronagraphs do.

5.3. Sensitivity of the PIAAC for Earth-sized Planet Detection

As illustrated in Figure 14 (*bottom right*), the PIAAC delivers high-quality images, with good angular resolution (equal to the diffraction limit of the telescope used) and very low distortion across the field of view necessary to image extrasolar planetary systems. In comparison, classical apodization (Fig. 14, *top right*) suffers from a large IWA and a poor angular resolution, and the PIAAI (Fig. 14, *bottom left*) delivers aberrated images that are especially problematic in systems with multiple planets and/or complex exozodiacal light structures.

To test the sensitivity of the PIAAC for Earth-sized planets detection, we consider a Sun-Earth system at maximum elongation. The projected separation is 1 AU, and the planet luminosity is 3.3×10^{-10} times the central star luminosity. To compute the signal-to-noise ratio (S/N), we consider only photon noise from the planet and the starlight (noiseless detector). We adopt a focal plane mask size of $1.6\lambda/d_s$, which provides a good level of immunity to pointing and focus errors (see § 5.2), and the stellar leak is estimated from the stellar angular diameter. The transmission of the coronagraph is also taken into account to estimate the planet flux in the focal plane detector. A central wavelength of $0.5 \mu\text{m}$ and a spectral bandwidth of $0.2 \mu\text{m}$ are adopted.

756

GUYON ET AL.

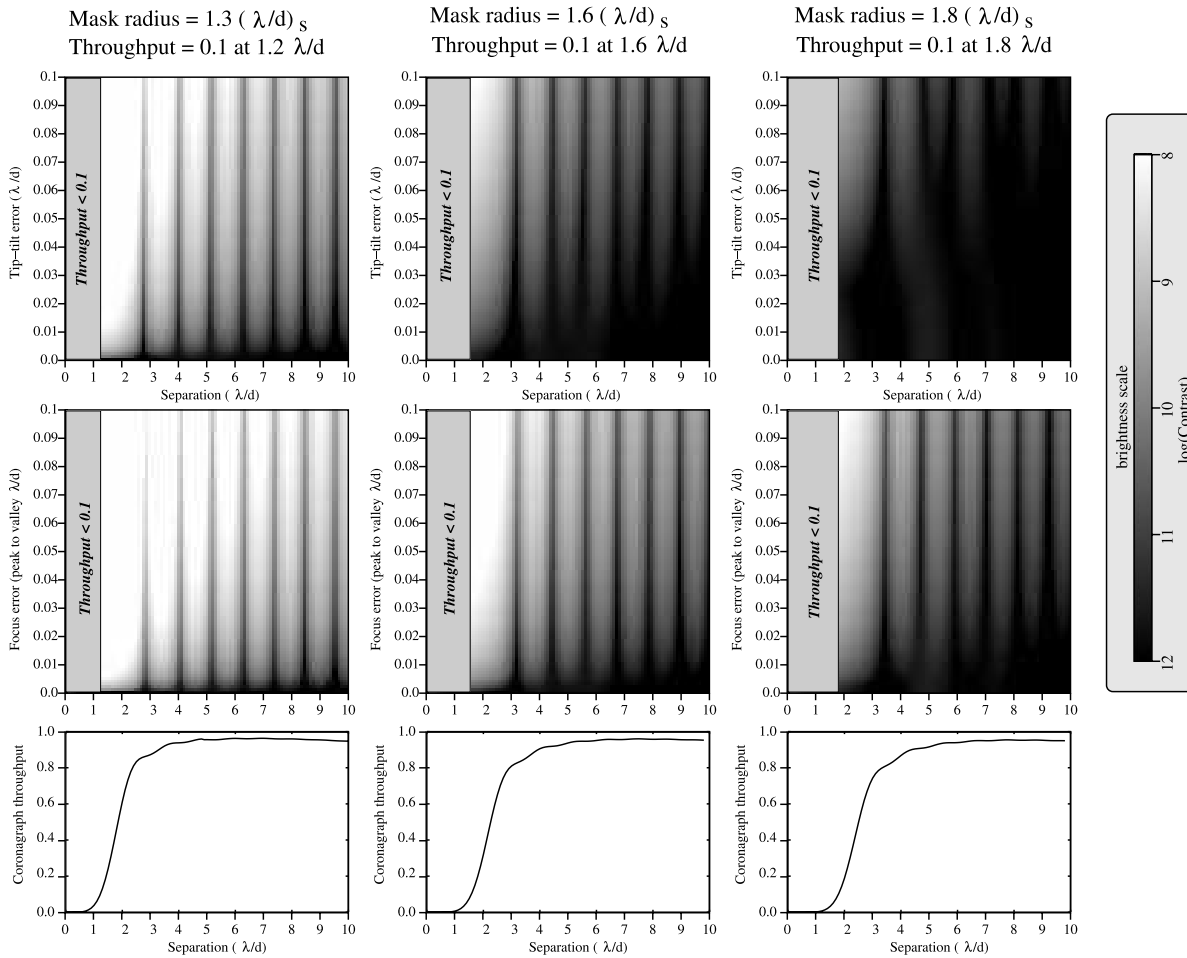


FIG. 13.—Sensitivity of the PIAAC to tip-tilt and focus wave-front errors for three different sizes of focal plane occulting mask (mask size increases from left to right). The raw contrast of the PIAAC image is plotted for tip-tilt (*top row*) and focus (*center row*) errors as a function of companion offset (*x*-axis) and amplitude of the wave-front error (*y*-axis). The PIAAC throughput as a function of source offset is also shown (*bottom row*). The range of offset for which the PIAAC throughput is less than 10% is shown in gray in the top and center rows.

With this simple model, the exposure time required to reach a given S/N can be expressed as a function of the telescope diameter and the distance to the planetary system. As shown in Figure 15, a 2 m telescope can detect an Earth-sized planet at 10 pc in 10 minutes, while it requires 28 s on a 4 m telescope and 6 s on an 8 m telescope. With a maximum allowed exposure time of 1 hr per target, Earth-sized planets can be detected to 12.3 pc with a 2 m telescope and to 24.6 pc with a 4 m telescope. Detection times are very short with an 8 m telescope, even at 25 pc (53 s). This simple model does not account for planet phase, likelihood of the planet to be near the maximum elongation, and stars of a different spectral type than the Sun. However, the results obtained clearly show that the PIAAC is a powerful tool for the direct detection of exoplanets, even with a 2–4 m diameter telescope.

A thorough simulation of the PIAAC performance in carrying out a survey of nearby solar-type stars is in preparation and will be published separately.

With a 4 m telescope, the performance of the PIAAC is limited by the photon noise of the planet itself; the amount of

residual starlight is smaller than the planet flux. This is illustrated in Figure 16, where the actual exposure time curve follows very closely the one computed with no central star. The coronagraph throughput is close to 100% for systems closer than 15 pc, and the sensitivity is therefore very close to what it would be if the planet were observed without its parent star and without a coronagraph (“no star, no coronagraph” curve in Fig. 16). At distances exceeding 15 pc, the coronagraph throughput affects the planet flux and therefore increases the exposure time required for detection. In this example, the IWA of the PIAAC corresponds to 1 AU at 25 pc, a separation for which the exposure time is 10 times longer owing to the low throughput.

Although exozodiacal light (or other sources of “background” light) was not considered in this model, its flux would likely exceed the planet’s flux inside the diffraction peak of the planet’s image. In an exozodiacal limited measurement, the exposure time required for detection is proportional to the inverse of the exozodiacal flux contained inside the diffraction peak. The diffraction limit of the PIAAC is about 3 times better than for a classical apodizer, which represents a gain of a factor of about

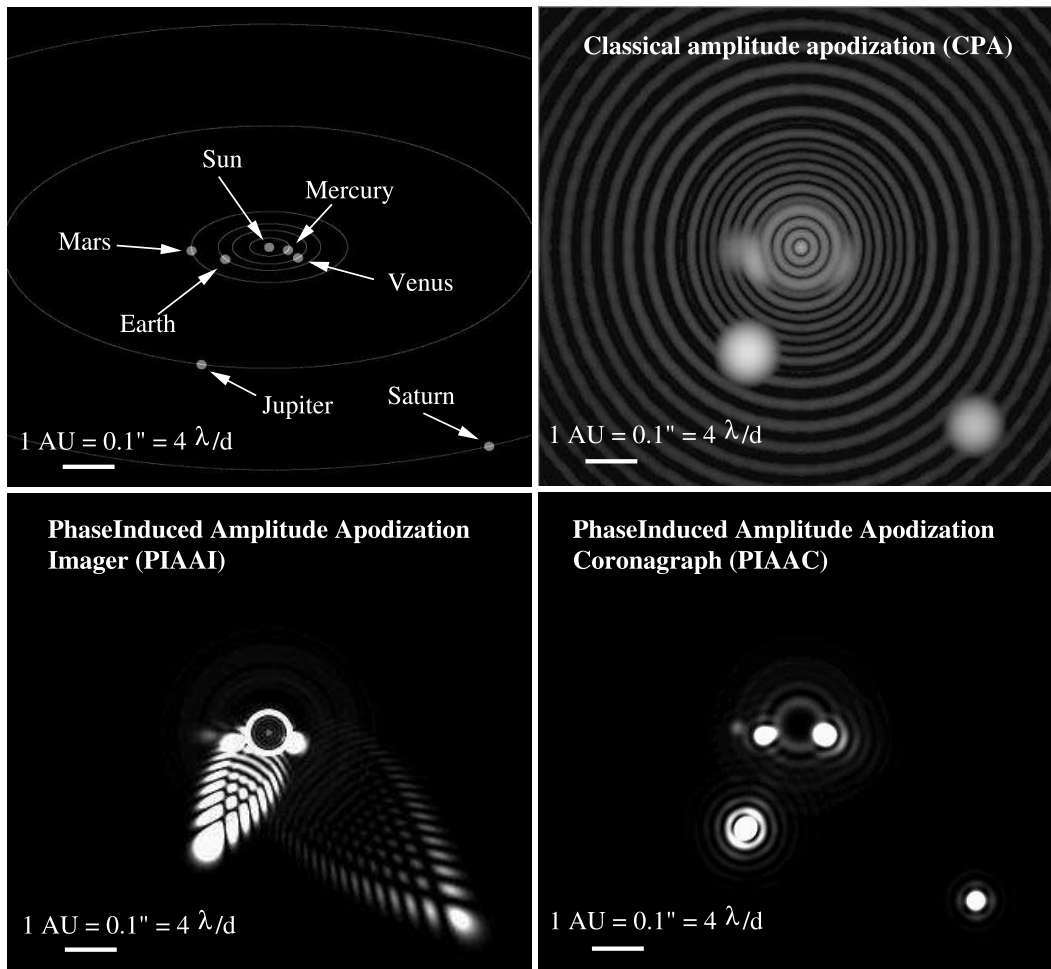


Fig. 14.—Simulated $0.5 \mu\text{m}$ images of the solar system at a distance of 10 pc with a 4 m diameter telescope. The same apodization profile was produced by classical apodization (*top right*) and PIAA (*bottom left*). In the PIAAC (*bottom right*) the original pupil geometry was restored before imaging. For the CPA and PIAA, an focal plane occulting mask was used to block the starlight, and the images shown are acquired in the reimaged focal plane. In all three images, the angular size of the star was taken into account and the faint concentric rings centered on the optical axis are residual starlight.

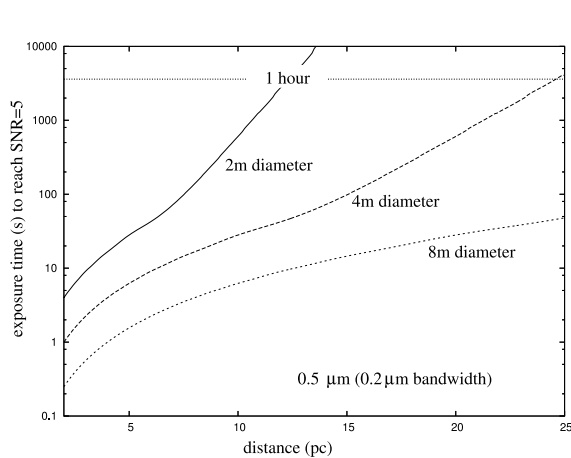


Fig. 15.—Exposure time required to detect ($S/N = 5$) an Earth-sized planet at maximum elongation as a function of distance to the system, for three sizes of telescope (2, 4, and 8 m diameters).

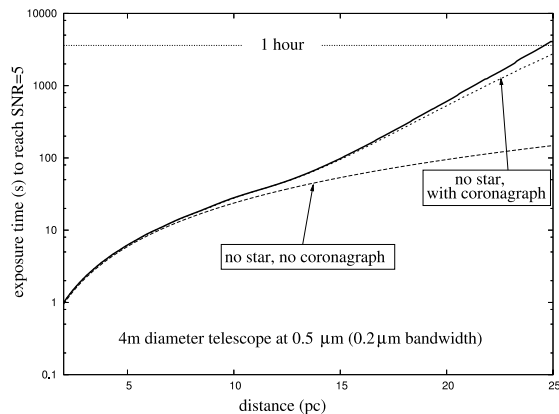


Fig. 16.—Exposure time required to detect ($S/N = 5$) an Earth-sized planet at maximum elongation as a function of distance to the system (*solid line*). The same exposure time is also shown as if the residual starlight were perfectly removed (*top dashed line*), and as if both the star and the coronagraph were removed (*bottom dashed line*).

10 in exposure time. Since classical apodizers transmit about 10%–20% of the light gathered by the telescope, it is expected that the PIAAC requires exposure times 50–100 times shorter than classical apodizers in the exozodiacal limited case.

5.4. Use in Space and on Ground-based Telescopes

In this study we have so far only considered the use of the PIAAC in a telescope that delivers a perfect wave front. Mid and high spatial frequency wave-front aberrations will degrade the achievable image contrast in the PIAAC just like in other coronagraphs. In a well-engineered space telescope, the drifts in the optics shapes can be small and slow, and wave-front control techniques could be used to bring the phase errors to an acceptable level (less than 1 nm).

On ground-based telescopes equipped with high-order adaptive optics systems, the wave-front aberrations cannot be reduced to such levels because of the speed of the turbulence and the limited number of photons available to measure it. Even with a “perfect” coronagraph, the achievable contrast level on these telescopes is therefore not very high (at best 10^7 at a few λ/d for very bright stars). The PIAAC, however, remains a very attractive coronagraph for ground-based telescopes: it is achromatic and has a small IWA and a high throughput. Of particular interest is the ability to work at very small separations with a low sensitivity to tip-tilt errors in the wave front (tip-tilt residuals are the dominant source of “leak” in coronagraphs with small IWAs). We note that plans to detect exoplanets with ground-based telescopes are based on very large apertures, working at a large multiple of λ/d . In these conditions, the telescopes will typically be limited not by the static diffraction in

the PSF but by the residual wave-front error. At large working angle and (relatively) large wave-front error, the PIAAC PSF benefits may not be important. The other PIAAC benefits of throughput and resolution will still be useful at relatively large working angle. The static PSF will be important for programs that require the small inner working angle.

6. CONCLUSION

The PIAAC offers a significant improvement over the previously proposed PIAAI concept (Guyon 2003), as illustrated in Figure 14. The PIAAC combines high contrast, small IWA, full throughput, and low sensitivity to pointing errors. Since the apodization is achieved by geometrical optics, it is achromatic and not likely to be prone to unwanted diffraction effects. No other current coronagraph design combines all these advantages. For example, classical coronagraphs that have small IWA (about $1\lambda/d$) are very sensitive to pointing errors, and apodization-based coronagraphs are not sensitive to pointing but have large IWA and poor throughput. The PIAAC is therefore very well suited to image extrasolar planets and can efficiently sample a large number of nearby stars with a moderate-sized telescope. The performance (IWA, sensitivity, and size of off-axis PSFs) of a PIAAC is equivalent to the performance of a classical pupil apodized telescope 2–3 times larger in diameter (see Fig. 14).

This work was carried out under JPL contracts 1254445 and 1257767 for Development of Technologies for the Terrestrial Planet Finder Mission, with the support and hospitality of the National Astronomical Observatory of Japan.

REFERENCES

- Boccaletti, A., Riaud, P., Moutou, C., & Labeyrie, A. 2000, *Icarus*, 145, 628
 Guyon, O. 2003, *A&A*, 404, 379
 Guyon, O., & Roddier, F. 2002, *A&A*, 391, 379
 Jacquinot, P., & Roizen-Dossier B. 1964, *Prog. Opt.*, 3, 29
 Kasdin, N. J., Vanderbei, R. J., Spergel, D. N., & Littman, M. G. 2003, *ApJ*, 582, 1147
 Labeyrie, A. 1996, *A&AS*, 118, 517
 Riaud, P., et al. 2002, *A&A*, 396, 345
 Roddier, F., & Roddier C. 1997, *PASP*, 109, 815
 Rouan, D., Riaud, P., Boccaletti, A., Clenet, Y., & Labeyrie, A. 2000, *PASP*, 112, 1479
 Soummer, R., Aime, C., & Falloon, P. E. 2003, *A&A*, 397, 1161
 Traub, W. A., & Vanderbei, R. J., 2003, *ApJ*, 599, 695
 Vanderbei, R. J., Spergel, D. N., & Kasdin, N. J. 2003, *ApJ*, 599, 686

Troisième partie

Applications de la reconfiguration de pupille

Chapitre 4

Analyse d'onde pour les ouvertures diluées

Pour mettre en phase un interféromètre, les méthodes maintenant classiquement utilisées pour l'optique adaptative des télescopes monopupilles sont inutilisables : les mesures de la pente locale du front d'onde ([Hartmann 1900] & [Shack & Platt 1971]) ou de sa courbure ([Rodier F. 1988]) ne permettent en effet de reconstruire le front d'onde que si ce dernier est continu.

Pour un interféromètre, la distance séparant les sous pupilles n'a pas de limite et l'hypothèse de continuité est impossible à invoquer pour la reconstruction du front d'onde : une autre approche est par conséquent indispensable.

L'interférométrie stellaire optique n'est cependant pas une science tellement nouvelle, l'expérience fondatrice de Michelson remontant à 1921. Au moins une technique existe et consiste à disperser les franges d'interférence. La technique des speckles dispersés, qui fait l'objet du chapitre de cette thèse est en fait une simple généralisation de la méthode de réglage de l'expérience de Michelson pour un interféromètre à n ouvertures.

D'autres méthodes d'analyse du front d'onde sont également peut être adaptées à la mesure du cophasage : l'analyseur de surface d'onde pyramide de [Ragazzoni 1996] ou l'extension du senseur de courbure de [Cuevas 2002]. Ces méthodes se concentrent cependant pour le moment sur les miroirs segmentés des futurs grands télescopes.

4.1 Gagner de la cohérence

Innovant par rapport à Edouard Stéphan qui s'était contenté de placer un masque percé de 2 trous dans la pupille d'un télescope, Michelson avait conçu un système périscopique à 4 miroirs porté par le tube du télescope de 100 pouces de l'Observatoire du Mont Wilson.

Cette innovation lui a permis d'augmenter la résolution angulaire de son interféromètre au delà de ce que lui permettait le diamètre du télescope. L'observation des franges nécessitait cependant un contrôle précis des chemins optiques suivant chacun des 2 bras périscopiques. Pour voir les franges, voilà le constat fait par Michelson & Pease ([Michelson & Pease 1921]) :

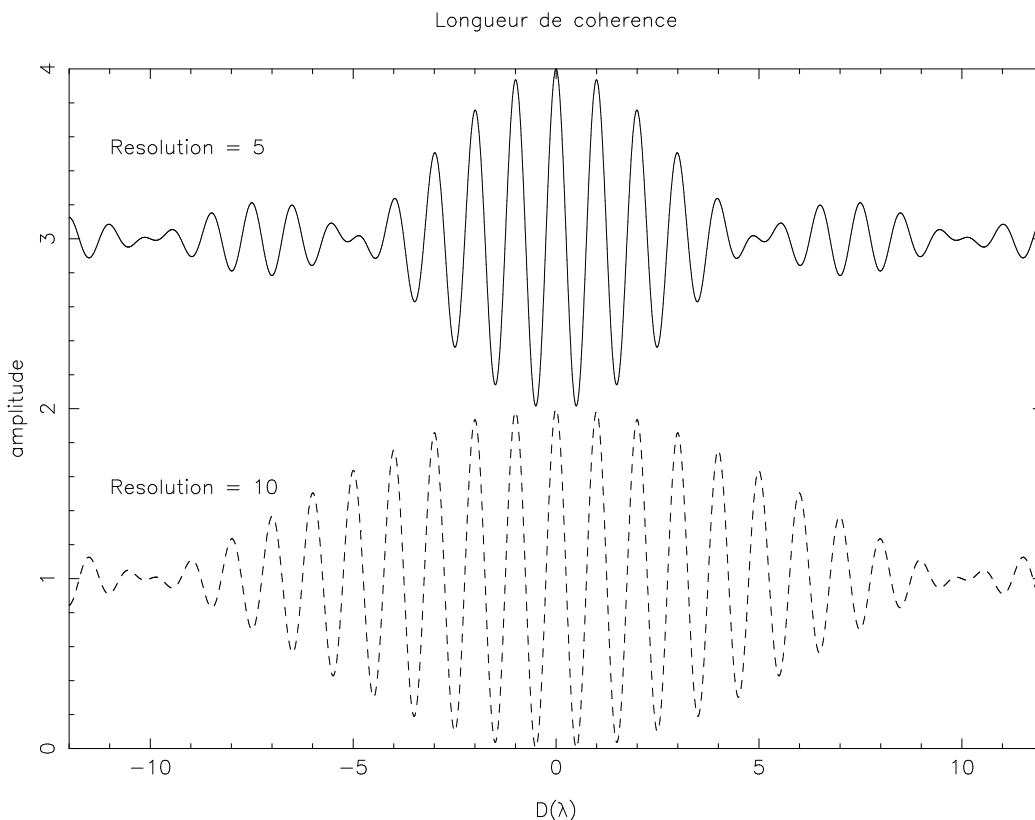


FIG. 4.1 – Longueur de cohérence et visibilité des franges d'interférence.

“... the finding of the fringes is notably facilitated by a direct-vision prism placed in front of the eyepiece, which permits observation of interference bands with a path-difference of several hundred waves”.

Ce que Michelson et Pease rappellent ici est que la lumière blanche est une superposition de contributions dans un spectre continu de longueurs d'onde et qu'il est plus facile d'observer un phénomène de diffraction quand on sépare ces différentes contributions, en dispersant la lumière avec un prisme ou un réseau. La tolérance maximale sur le chemin optique dans laquelle on peut observer des franges d'interférence entre deux télescopes est appelée longueur de cohérence et son expression est :

$$\Lambda_C = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \lambda \times R, \quad (4.1)$$

où R représente la résolution spectrale.

Comme le montre la figure 4.1, on peut trouver les franges d'interférence dans un intervalle de chemin optique d'autant plus grand que la résolution est élevée. Au delà de Λ_C , les franges sont brouillées et deviennent alors très difficiles à détecter.

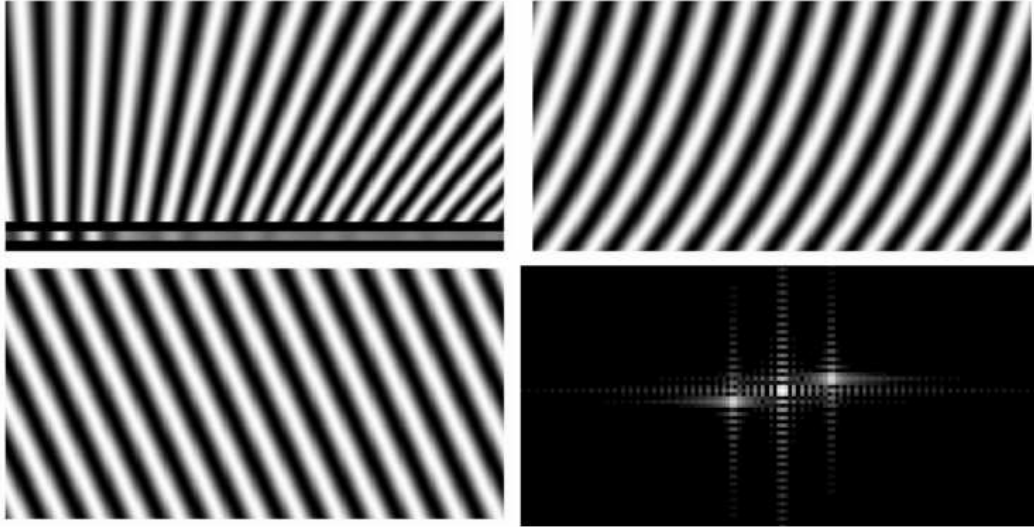


FIG. 4.2 – Procédé de mesure de la différence de marche d'un interféromètre à 2 télescopes. De gauche à droite et de haut en bas : (1) les franges dispersées enregistrées sur le détecteur, (2) les franges après remise à l'échelle, (3) les franges après passage en $1/\lambda$ et (4) la TF finale.

4.2 Franges dispersées

Ainsi, on disperse pour gagner de la cohérence et voir les franges entre 2 télescopes sur une gamme de différence de marche plus importante. La figure 4.2 représente un tel système de franges dispersées avec la différence de marche comme abscisse et la longueur d'onde comme axe des ordonnées. On peut décrire la position de chaque frange brillante par une équation simple :

$$x(\lambda) = \frac{\delta}{B} + k \times \frac{\lambda}{D}, \quad (4.2)$$

où δ est la différence de marche, B la base de l'interféromètre constitué de 2 ouvertures de diamètre D et k est un entier relatif.

La première étape de notre traitement consiste à remettre à la même échelle les franges dans toutes les longueurs d'onde en appliquant une homothétie centrée sur l'axe optique et de rapport inversement proportionnel à l'interfrange λ/B . L'équation d'une frange peut alors s'écrire :

$$\hat{x}(\lambda) = \frac{\delta}{\lambda} + k \times \frac{B}{D}. \quad (4.3)$$

On a alors une série de franges parallèles variant avec δ/λ qu'on peut représenter en inverse de longueur d'onde comme illustré sur la figure 4.2. L'équation d'une frange est alors une simple équation de droite dont le coefficient directeur est la différence de marche δ qu'on cherche à identifier :

$$\hat{x}(\lambda^{-1}) = \delta \times \lambda^{-1} + k \times \frac{B}{D}. \quad (4.4)$$

La dernière étape du procédé consiste à calculer le spectre de puissance de cette image, afin d'estimer la différence de marche entre les deux télescopes (*c.f.* la dernière partie de la figure 4.2). L'information dans cette image se limite à 2 points centro-symétriques dont l'ordonnée et l'abscisse correspondent respectivement à la fréquence spatiale vue par l'interféromètre et à la différence de marche δ entre les 2 télescopes. L'interféromètre est parfaitement cophasé lorsque la frange blanche est centrée sur le détecteur. Dans cette configuration, les points du spectre de puissance sont alignés sur l'axe des abscisses.

NB : sur un très petit champ, on peut considérer au premier ordre que les franges brutes (partie 1 de la figure 4.2) sont parallèles et en calculer directement le spectre de puissance sans opérer le traitement de remise à l'échelle et redressement qui est ici présenté.

Cette méthode, héritée du savoir faire expérimental de Michelson a ensuite été informatisée pour permettre l'automatisation du suiveur de franges utilisé avec succès sur l'interféromètre GI2T [Koechlin *et al.* 1996]. Elle a alors prouvé son efficacité pour des télescopes multi- r_0 non équipés d'une optique adaptative.

4.3 Méthode des speckles dispersés

On généralise en fait simplement la technique au cas d'un réseau interférométrique à 2 dimensions. Les faisceaux des télescopes sont directement recombinaés en mode Fizeau ou hypertélescope, en prenant toutefois garde à ne pas surdensifier, comme présenté au paragraphe 2.4.3 et sur la figure 2.10. Lorsque les sous ouvertures ne sont plus en phase, l'image d'une étoile non résolue est un paquet de speckles (*c.f.* figure 4.3).

La méthode des speckles dispersés consiste à s'intéresser à la dépendance spectrale de ces speckles : de cette analyse du spectre intégral de la figure de diffraction, on tire les erreurs de chemin optique pour toutes les bases de l'interféromètre avec un algorithme très comparable à celui des franges dispersées.

4.3.1 Dépendance spectrale des speckles

Il est intéressant avant d'aller plus loin de rappeler quelques propriétés simples sur le chromatisme des speckles. Je propose au lecteur de distinguer le chromatisme de taille du chromatisme de phase (que j'appelle également chromatisme de position) dans la mesure où on peut séparer ces effets de façon optique (avant acquisition) ou numérique (après acquisition d'une image).

- Le chromatisme de taille est j'oserais dire, le plus évident et pour cause : tous les effets de diffraction à l'infini sont caractérisés par un paramètre d'échelle qui est la longueur d'onde. C'est par exemple le cas de la relation du rayon de la tache d'Airy :

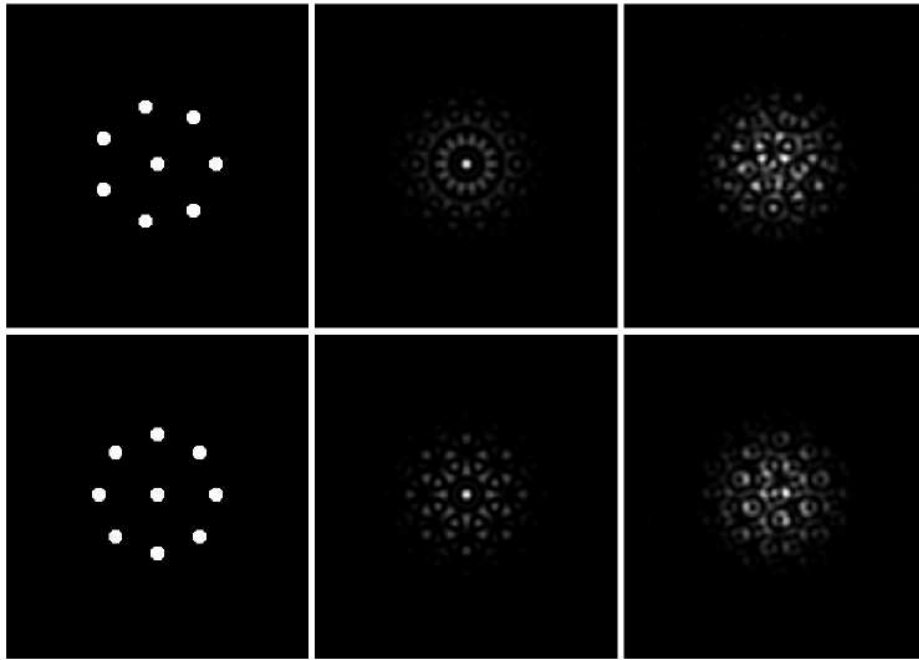


FIG. 4.3 – Pour 2 interféromètres à 8 (non redondant) et 9 (redondant) ouvertures : à gauche, la pupille de l’interféromètre, au centre, image monochromatique en l’absence d’erreurs de chemin optique et à droite, image en présence d’erreurs de piston entre les ouvertures. L’image, ressemblant fortement à celle que produirait un télescope continu en l’absence de chemin optique se dégrade en présence d’erreurs de piston en un paquet de speckles.

$$R_A = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (\text{en radians}), \quad (4.5)$$

où D est le diamètre du trou ou de la lentille à l'origine du phénomène de diffraction. Le diamètre d'une tache d'Airy est donc proportionnel à λ . Les anneaux de diffraction, les franges et les speckles n'échappent pas à cette règle.

Notez que cet effet peut être corrigé selon 2 procédés : soit au niveau du montage optique en utilisant un correcteur de Wynne, soit après acquisition d'images monochromatiques focales en opérant une simple homothétie de ces images pour les remettre toutes à la même échelle, de la même façon que présenté dans le paragraphe 4.1 sur les franges dispersées.

- Le chromatisme de phase : un chemin optique est caractérisé par son épaisseur δ , qui est fonction de la longueur métrique du chemin considéré ainsi que de l'indice optique du matériau traversé par la lumière.

Les lignes à retard d'un interféromètre sont, dans le cas d'optique de volume, faites de miroirs espacés dans un couloir dans le vide où dans l'air : le chemin optique est donc directement la distance totale.

Le long d'un chemin optique δ , la phase du champ électrique est modifiée d'une valeur :

$$\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}. \quad (4.6)$$

Ce déphasage est chromatique, les grandes longueurs d'onde étant moins affectées par la perturbation que les longueurs d'onde les plus courtes.

Ces effets sont également séparables dans le formalisme de Fourier :

$$I_F(u, v, \lambda) = \left| \iint P(x, y) e^{-i2\pi\left(\frac{ux+vy}{\lambda f} + \frac{\delta(x,y)}{\lambda}\right)} dx dy \right|^2, \quad (4.7)$$

où la première partie de l'exponentielle correspond au terme de chromatisme de taille et la deuxième au chromatisme de phase.

Pourquoi parler de chromatisme de position ?

Lorsqu'un interféromètre $2D$ est constitué de plus de 3 ouvertures, en présence d'erreurs de piston, il est impossible de trouver un point du plan image pour lequel on aurait égalité des chemins optiques pour toutes les ouvertures : le système est en quelque sorte hyperstatique avec plus de contraintes ($n - 1$ différences de marche avec $n > 3$) que de degrés de liberté (l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan focal).

Il y a cependant *a priori* plusieurs régions de l'image pour lesquelles on est à égalité de chemin optique pour quelques ouvertures de l'interféromètre : c'est en ces endroits que vont se former des speckles brillants.

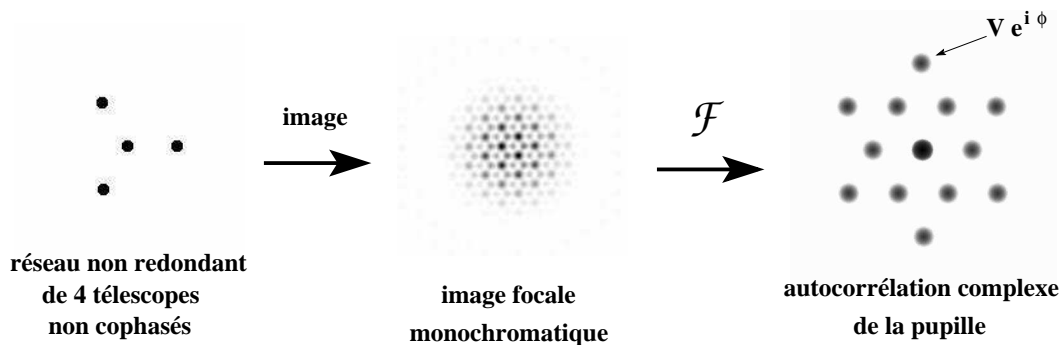


FIG. 4.4 – Calcul de l’autocorrélation complexe d’une image monochromatique

On a vu que la phase induite par un chemin optique est chromatique : ainsi, selon la longueur d’onde, la position des speckles brillants peut *a priori* changer, justifiant ainsi l’emploi de l’expression chromatisme de position.

Une fois le chromatisme de taille corrigé, c’est de la dépendance spectrale de la position des speckles qu’on va tirer l’information sur les chemins optiques.

4.3.2 Généraliser les franges dispersées

On se place dans le plan de recombinaison global et on enregistre une série d’images monochromatiques avec un temps de pose inférieur à la durée de vie des speckles. Nous discuterons un peu plus loin des aspects de rapport signal sur bruit de la méthode.

Dans [Martinache 2004a], il est montré qu’un cube de données constitué d’images monochromatiques d’une étoile non résolue dans différentes longueurs d’onde et ayant subi un traitement identique à celui qui est présenté au paragraphe 4.1, est exactement le module carré de la transformée de Fourier à 3 dimensions de la pupille de l’interféromètre. Le spectre de puissance de ce cube de données est alors l’autocorrélation à 3 dimensions de la pupille : on retrouve un ensemble de points dont l’abscisse et l’ordonnée sont associées aux fréquences spatiales et dont la hauteur est proportionnelle à la différence de marche associée.

Ce formalisme “3D” a été mis à profit par [Borkowski *et al.* 2005] pour évaluer la sensibilité de cette méthode de cophasage par simulation numérique de type Monté Carlo.

Des images monochromatiques

Pour simplifier la description, on s’intéresse dans un premier temps à un interféromètre non redondant. La redondance, *i.e.* la présence dans la pupille de bases identiques, est un raffinement supplémentaire dont on tiendra compte un peu plus loin dans ce chapitre.

On enregistre une image monochromatique au foyer de l’interféromètre : la figure 4.4 présente le résultat du calcul de la transformée de Fourier discrète (TFD) d’une telle image pour un interféromètre à 4 télescopes.

Cette technique de la TFD, est très classiquement utilisée comme estimateur de la visibilité des franges [Goodman 1985] dans le cas de l’interférométrie à 2 télescopes. Le résultat

de ce calcul est l'autocorrélation complexe de la pupille. L'intérêt d'avoir choisi une pupille non redondante est que chacun des points de cette autocorrélation est unique, car associé à une unique base. Le nombre complexe en chacun des 2×6 (l'image est antisymétrique) points de la figure est en fait la visibilité complexe associée à chacune des 6 bases :

$$\gamma = |\gamma| e^{i\phi}. \quad (4.8)$$

Deux informations sont alors accessibles dans cette autocorrélation :

- **module de la visibilité** : Si on s'intéresse à un objet non résolu, le module de visibilité de chacun des points vaut 1. Cependant, la visibilité associée aux grandes bases va décroître lorsque la source observée devient partiellement résolue. C'est cette mesure du module qui est traditionnellement faite en interférométrie et qu'on utilise pour contraindre les modèles d'étoiles.

Comme rappelé sur la figure 4.1, la visibilité des franges est également modulée par l'enveloppe de cohérence, fonction de la largeur du canal spectral utilisé. Dans le cas d'une bande rectangulaire de largeur $\Delta\lambda$, l'enveloppe de cohérence est un sinus cardinal. Le module de visibilité $|\gamma|$ est alors également fonction de la différence de marche sur la base correspondante :

$$|\gamma| = |\gamma_0| \times \frac{\sin(\pi\delta/\Lambda_C)}{\pi\delta/\Lambda_C}, \quad (4.9)$$

où $|\gamma_0|$ représente le module de visibilité objet.

- **phase de la visibilité** : C'est la que se trouve l'information qui nous intéresse. On peut dire que ce terme de phase est la somme de 2 termes :
 - La phase objet, *i.e.* un terme de phase fonction de la position sur le ciel de l'objet considéré ainsi que de ces éventuelles asymétries.
 - La phase instrumentale, induite par une mauvaise correction du piston atmosphérique.

En supposant que les objets auxquels on s'intéresse sont simples, à symétrie de révolution et centrés sur l'axe optique de l'interféromètre, on ne mesure que la phase instrumentale, variant comme $\phi = 2\pi\delta/\lambda$, avec δ le piston associé à la base. La phase étant connue à 2π près, il demeure une incertitude sur la différence de marche.

4.3.3 Une image dispersée

On peut envisager deux modes de fonctionnement :

- l'analyseur est situé en aval d'un suiveur de franges "grossier" qui nous garantit une erreur sur le piston rms inférieure à λ : une seule mesure de la phase nous suffit *a priori* pour la mesure du piston.
- l'analyseur est en "première ligne" et doit encaisser des erreurs de piston de plusieurs λ (tout en restant dans la longueur de cohérence au delà de laquelle, on ne peut plus grand chose) : plusieurs mesures de la phase dans différentes longueurs d'onde sont nécessaires pour lever la dégénérescence.

Dans les 2 cas de figure qu'on vient d'évoquer, la réalisation de mesures indépendantes simultanées de la phase, en travaillant dans différents canaux spectraux, va permettre d'améliorer le rapport signal à bruit de la mesure.

4.3.4 Estimation du bruit de la mesure de la phase

Ainsi, évaluer les différences de marche par la méthode des speckles dispersés revient à mesurer la visibilité complexe d'un système de franges dans différentes longueurs d'onde. C'est de l'évolution de la phase en fonction de la longueur d'onde qu'on déduit une mesure achromatique de la différence de marche.

L'évaluation de la sensibilité de la mesure de visibilité complexe au bruit de photon est un calcul classique, par exemple présenté dans [Goodman 1985] pour le cas d'un interféromètre à deux télescopes enregistrant des franges monochromatiques. Soient N_P le nombre total de photons des franges et γ la visibilité complexe associée à ces franges. Le rapport signal sur bruit S/B associé à l'estimation du module et l'écart type σ_ϕ de celle de la phase de la visibilité complexe sont d'après Goodman :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_\gamma = \sqrt{N_P}|\gamma| \quad (4.10)$$

$$\sigma_\phi = \frac{1}{|\gamma|} \frac{1}{\sqrt{N_P}}. \quad (4.11)$$

Soient maintenant n et n_P respectivement le nombre de télescopes (supposés identiques) et le nombre de photons collectés par un télescope dans un canal spectral étroit. L'image monochromatique au foyer de l'interféromètre contient donc au total $N_P = n * n_P$ photons. De l'analyse de cette image (par transformée de Fourier) on tire C_n^2 visibilités complexes.

Les n_P photons collectés par chacun des n télescope sont partagés sur $n - 1$ bases d'où un écart type sur l'estimation de la phase sur chaque base qui vaut :

$$\sigma_\phi = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{n-1}{n_P}}. \quad (4.12)$$

L'erreur typique sur l'estimation de la phase d'une visibilité complexe croît donc comme la racine du nombre de télescopes. Or on dispose de cette mesure de phase pour chacune des C_n^2 bases. On a donc pour chaque ouverture $n - 1$ estimations de phase : l'écart type, en considérant toutes les visibilités doit donc être divisé par la racine de ce nombre. On montre alors que cet erreur est indépendante du nombre d'ouvertures et vaut :

$$\sigma_\phi = \frac{1}{|\gamma|} \frac{1}{\sqrt{n_P}}. \quad (4.13)$$

C'est donc uniquement le nombre de photons par ouverture, et donc la taille des sous pupilles, qui conditionne la qualité de la mesure de phase. Ce comportement faisait partie

des conclusions de [Martinache 2004a] dans lequel on note que le nombre seuil de photons par télescope nécessaire à la convergence de l'algorithme de reconstruction de la pupille est indépendant du nombre d'ouvertures.

4.3.5 Pourquoi pas par paire ?

Avec ce stade de la discussion, il est légitime de se poser la question du choix du mode de recombinaison. Intuitivement, on peut penser que ce dernier ne doit pas être un facteur décisif sur la qualité des observations, le signal à bruit ne dépendant *a priori* que du nombre total de photons collectés par l'interféromètre. La question a en fait été exhaustivement traitée par [Prasad & Kulkarni 1989] qui comparent une recombinaison C_n^2 dans laquelle les n faisceaux des télescopes sont combinés par paire produisant $C_n^2 = n * (n - 1)/2$ systèmes de franges à une recombinaison C_n^n dans laquelle l'intégralité des faisceaux est recombinaison sur un unique détecteur.

Le critère de comparaison retenu par ces auteurs est le rapport signal sur bruit de l'image reconstruite après mesure des visibilités complexes pour un point non résolu placé au centre du champ, *i.e.* pour un module de visibilité $|\gamma| = 1$ et une phase $\phi = 0$. Ils montrent que ce rapport signal sur bruit est meilleur dans le cas d'une recombinaison par paire que dans le cas d'une recombinaison globale et ce, que la pupille soit redondante ou non redondante.

Pour un grand nombre d'ouverture, le gain en signal sur bruit tend vers une constante :

- $G(C_n^2/C_n^n) = \sqrt{12/5} \approx 1.55$ pour une pupille non redondante.
- $G(C_n^2/C_n^n) = \sqrt{4/3} \approx 1.15$ pour une pupille redondante.

Ce gain modéré en faveur d'une recombinaison par paire ne tient toutefois pas compte de l'utilisation de détecteurs réels, incluant en particulier un bruit de lecture : typiquement $1 \bar{e}$ dans le visible mais $16 \bar{e}$ en bande K avec les détecteurs actuels. Ces calculs ne tiennent pas non plus compte dans le rapport signal sur bruit de la contribution du fond de ciel. Cette source de bruit, incohérente aura un effet perturbateur d'autant plus faible qu'on recombine un nombre important d'ouvertures. On peut enfin également légitimement s'inquiéter de la complexité d'un tel système de recombinaison par paire, dont le nombre de faisceaux croît comme le carré du nombre d'ouvertures.

4.3.6 Piston et phase objet

Afin de proposer une description la plus aboutie possible, le modèle d'évaluation du rapport signal sur bruit du paragraphe précédent inclut aux équations l'effet du module de visibilité de la source.

La méthode des speckles dispersés a cependant été conçue pour être utilisée sur une étoile de référence qui doit posséder au moins deux vertus : elle doit être suffisamment brillante pour permettre une mesure confortable de la phase, sans pour autant être résolue par l'interféromètre.

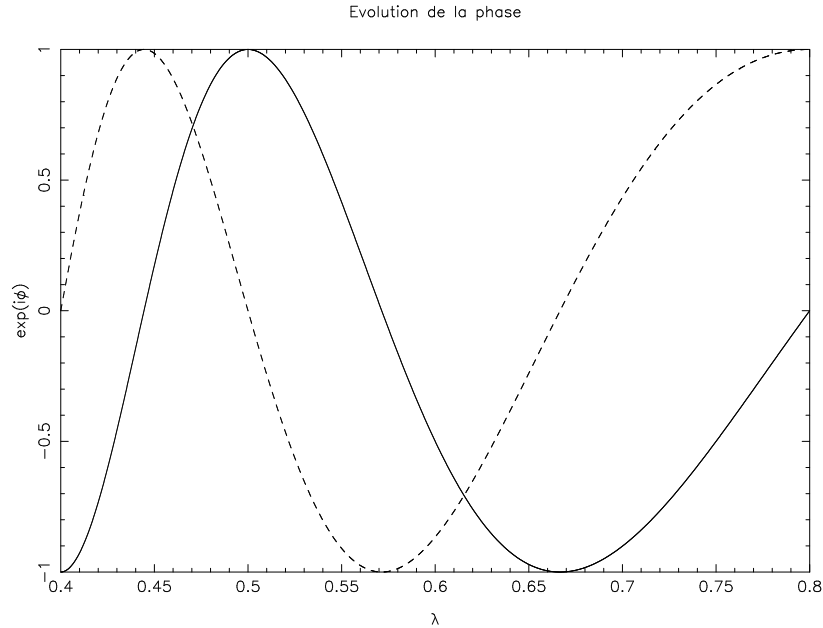


FIG. 4.5 – Parties réelle (trait continu) et imaginaire (trait pointillé) de la visibilité complexe (module $|\gamma| = 1$) avec une différence de marche $\delta = 1 \mu m$ en fonction de la longueur d’onde (ici, on couvre le visible). C’est de l’ajustement de cette courbe qu’on déduit la différence de marche. Le résidu après correction optique ou logicielle, est associé à l’objet.

Dans la mesure où une telle étoile de référence n’est pas forcément disponible, il est bon de se poser la question de l’utilisation de la méthode speckles dispersés sur la source d’intérêt. En effet, un spectre intégral du champ direct apparaît finalement comme une excellente source d’information scientifique. En plus du module de visibilité, il faut dans ce cas inclure la phase des objets.

Comme il a été rappelé précédemment, la phase enregistrée est la somme de deux termes inconnus qui sont *a priori* indiscernables : un terme de phase ϕ_O propre à l’objet observé et un terme de phase ϕ_P de piston sur la base considérée. Le fait de travailler en mode dispersé va cependant nous permettre de séparer les deux composantes et de ne corriger que la contribution associée au piston. La séparation est possible parce qu’on connaît la dépendance spectrale du terme de piston, variant simplement en $1/\lambda$.

Si on se place du point de vue “cophasage”, la phase objet (*a priori* chromatique) est une source de perturbation de la mesure de piston mais si on se place du point de vue “observation scientifique”, cette phase objet est l’observable auquel le cophaseur doit permettre l’accès. Si on appelle δ la différence de marche associée à la base considérée, le modèle simple suivant permet de s’y retrouver :

$$\phi(\lambda) = \phi_0(\lambda) + 2\pi\delta/\lambda. \quad (4.14)$$

Si on dispose d’une résolution spectrale suffisante, on peut construire la courbe d’évolution

de la visibilité complexe en fonction de la longueur d'onde (*c.f.* figure 4.5) et déduire la différence de marche de la “pseudo-périodicité” de cette courbe. Deux options sont alors envisageables :

- On peut ré-échantillonner la courbe en nombre d'onde et en calculer la Transformée de Fourier. Ce faisant, on se place dans la situation explorée par [Borkowski *et al.* 2005] qui cherchent à localiser dans un cube d'information, un pic signal dont la hauteur est directement la différence de marche δ .
- On peut ajuster cette courbe par le modèle proposé ($f(\lambda) = 2\pi\delta/\lambda$) en minimisant un critère des moindres carrés, le seul paramètre libre étant la différence de marche δ .

Dans les deux cas, si on dispose d'une optique adaptative (interférométrie cophasée), on peut après analyse, annuler le terme de piston en jouant sur les lignes à retard. Le résidu de phase, attribué à l'objet est alors directement accessible (sauf s'il suit également une loi en $1/\lambda$!). Maintenant, si l'interféromètre fonctionne en mode cohérencé seulement, on voit malgré tout que le fait de disperser nous permet d'accéder à la phase de l'objet, avec un signal à bruit toutefois dégradé par l'effet de l'enveloppe de cohérence. Que ce soit en mode cophasé ou cohérencé, le cophaseur permet alors de faire de la science en rendant l'information de phase de l'objet enfin accessible !

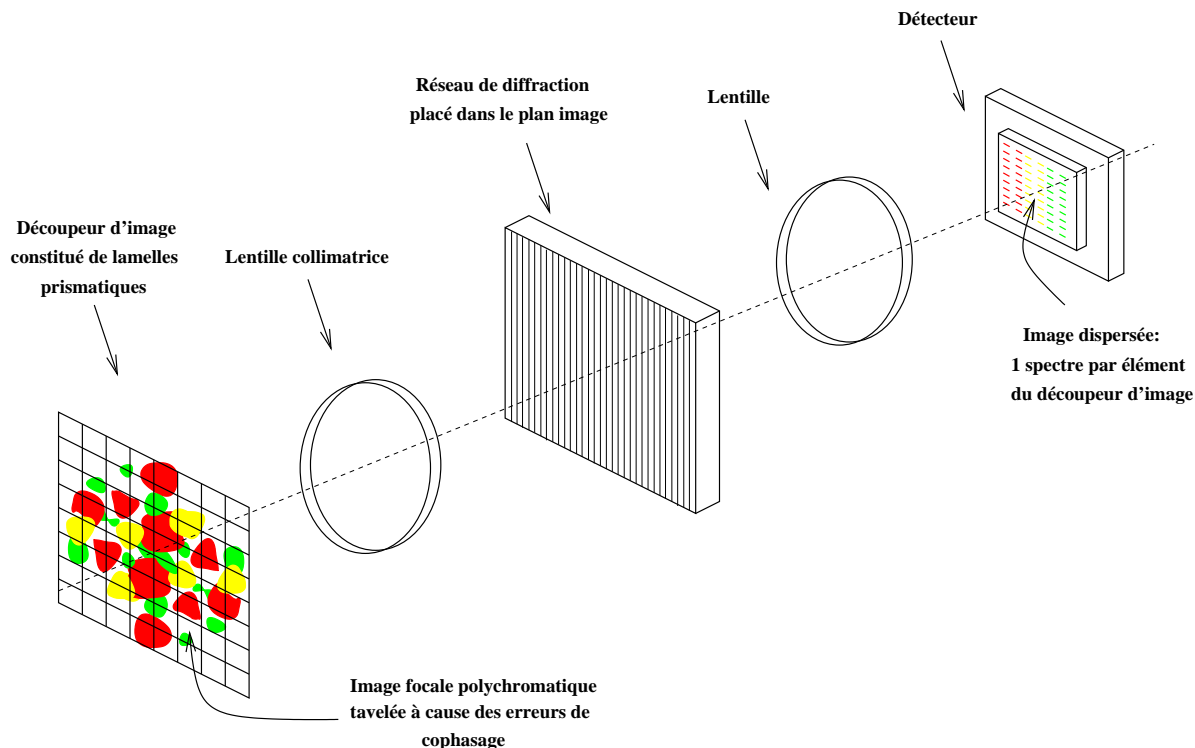


FIG. 4.6 – Montage optique pour la méthode des speckles dispersés.

4.3.7 Spectre intégral de l'image

Le montage expérimental pour la validation de la technique a été proposé par Labeyrie. Une illustration de ce montage est donnée à la figure 4.6. Le développement et l'exploitation préliminaire de ce montage ont fait l'objet d'une thèse soutenue par [Borkowski 2004].

Pour obtenir le spectre intégral des interférences, on peut soit enregistrer une série d'images monochromatiques avec un spectro-imageur de type Courtès, soit découper l'image en sous images dont on fait un spectre continu. C'est cette deuxième option qui est ici retenue.

On projette une image très agrandie de l'étoile de référence sur un composant venant découper l'image. Sa dimension est adaptée à la taille du lobe de diffraction d'une sous ouverture de l'interféromètre. Le découpeur est constitué de lamelles prismatiques qui dévient le faisceau correspondant à chaque sous élément de l'image, de sorte qu'à l'infini, l'image est réorganisée en ligne. On peut envisager de remplacer cette plaquette de prismes par une trame de microlentilles, chacune de ces lentilles injectant une toute petite image de la pupille dans une fibre optique monomode. La réorganisation de la pupille en ligne se ferait en réarrangeant le faisceau de fibres. L'image résultante est dispersée par un réseau de diffraction et produit sur un détecteur autant de spectres que de sous éléments éclairés du champ.

Chacun des spectres enregistrés est associé à un élément de résolution (*résels*) de l'image. On a déjà vu (*c.f.* paragraphe 2.3.1) que le nombre de résels contenus dans une pose courte

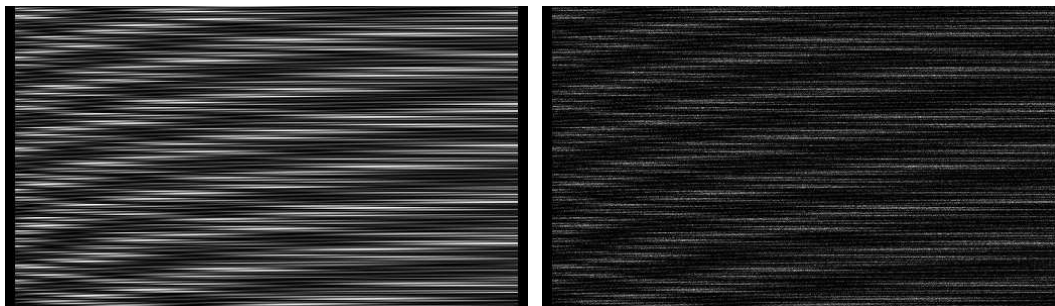


FIG. 4.7 – Simulation de spectres enregistrés avec un montage semblable à celui présenté sur la figure 4.6. Le spectromètre travaille de $0.4 \mu\text{m}$ à $0.8 \mu\text{m}$ avec une résolution $R = 750$. Les modulations qu'on voit dans le spectre sont fonction des erreurs de cophasage et d'autant plus rapides que ces erreurs sont importantes. On simule ici des erreurs de quelques microns. Le spectre de droite inclut le bruit de photon de la source étudiée.

est typiquement égal au carré du nombre d'ouvertures de l'interféromètre (cas d'une pupille non redondante). Le découpeur d'image doit donc *a priori* être composé d'au moins autant de sous éléments pour permettre de mesurer toutes les différences de marche dans la pupille. Les speckles n'ont cependant aucune raison de tomber exactement au centre des facettes du découpeur aussi un léger sur-échantillonnage, de 4 réseles par speckle (2 dans chaque direction), est essentiel pour permettre leur bonne localisation, et ainsi assurer une mesure confortable des différences de marche.

4.4 Simulations numériques

Même si la technique des speckles dispersés est *a priori* conçue pour pouvoir être utilisée avec les futurs réseaux interférométriques à grand nombre d'ouvertures, notre description se limitera au cas d'un interféromètre constitué de 4 télescopes, dont on commence par reconfigurer la pupille ...

4.4.1 Reconfigurons la pupille !

D'accord mais pourquoi ? Les interféromètres actuels sont faits de télescopes restant immobiles au cours d'une observation et dont les différences de chemin optique induites par l'observation d'un objet, qui lui se déplace, sont compensées par des lignes à retard. Cela n'empêche pas toutefois pas la pupille (ou du moins, sa projection sur le ciel) de se déformer au cours de l'observation. Aussi, pour simplifier l'algorithme de cophasage, une réorganisation de la pupille suivant un schéma adapté est essentielle. Une fois reconfigurée, la pupille doit alors être :

- **non redondante** : pour un faible nombre d'ouvertures, il est avantageux de travailler avec une configuration non redondante pour obtenir de façon directe les DDMs. La

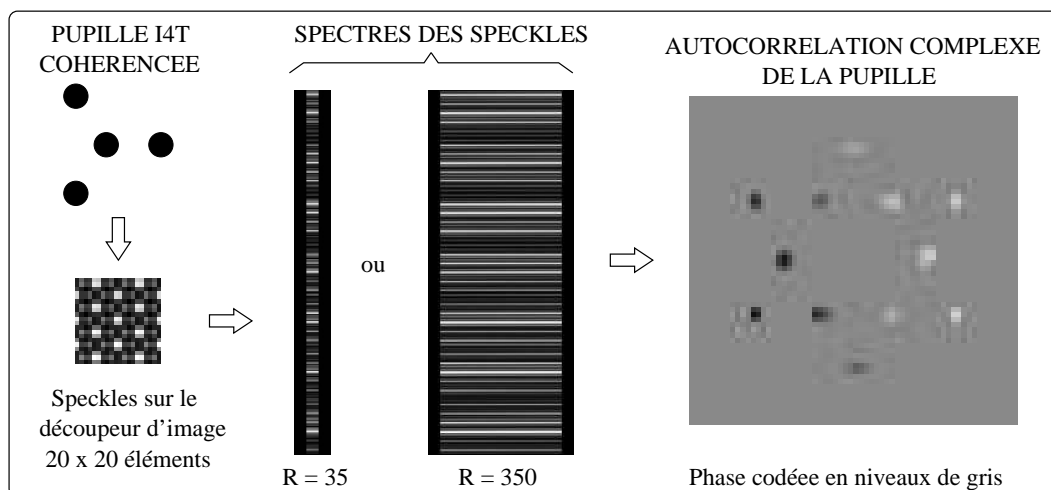


FIG. 4.8 – Algorithme

gestion de la redondance fait l'objet du paragraphe 4.7.

- **compacte** : afin d'optimiser l'échantillonnage spatial induit par l'utilisation d'un découpeur d'image. Minimiser le rapport entre les longueurs de base maximale et minimale permet de réduire le nombre de sous éléments nécessaires du découpeur.
- **stable dans le temps** : l'analyse d'onde se trouve considérablement simplifiée si la pupille est stable dans le temps. De plus la conservation des qualités de compacité et de non redondance est alors garantie.

Comme évoqué dans la deuxième partie de cette thèse, l'obtention d'une image directe implique (au moins) la conservation de la géométrie globale de la pupille (la position des centres des sous pupilles de l'interféromètre doit être conservée). Le cophasage n'a pas à respecter cette condition et la réorganisation de la pupille est totalement libre. Le schéma retenu pour quatre ouvertures est celui représenté sur la figure 4.4.

4.4.2 Algorithme Speckles Dispersés

On se place dans le cas où le montage qui vient d'être présenté est utilisé comme étage de cophasage fin, placé en dernière partie de la chaîne optique, derrière un système mettant 4 télescopes en cohérence à typiquement mieux que la longueur d'onde centrale du domaine de travail. La figure 4.7 montre des spectres qu'on enregistrerait sur une bande relativement large $\Delta\lambda = 0.4 \mu m$. Dans ce spectre on remarque facilement des modulations qui sont en fait induites par des différences de marche de l'ordre du micron. Dans le cas qui nous intéresse, ces modulations sont très lentes et non appréciables visuellement.

La bande spectrale couverte va de $0.6 \mu m$ à $0.8 \mu m$ avec deux résolutions $R = 35$ et $R = 350$, toutes deux plus que suffisantes pour couvrir le domaine de chemin optique accepté en entrée. Le découpeur d'image et le réseau nous produisent une série de 20×20 spectres, constitués, selon la résolution choisie, de 10 ou 100 pixels.

NB : Le choix de la résolution spectrale nécessaire et suffisante au fonctionnement du cophaseur speckles dispersés est lié au domaine de chemin optique à explorer par la longueur de cohérence. La résolution doit être proportionnelle à l'étendue du domaine.

On considère pour simplifier la simulation que le spectre de la source est uniforme sur la bande spectrale de travail et que le module de visibilité vaut l'unité. Une telle source qui constituerait un étalon idéal de l'interférométrie n'existe cependant pas. Il faut de plus reconnaître que l'observation d'une source qui aurait ces caractéristiques ne serait pas tellement intéressante du point de vue scientifique. En pratique, pour pouvoir se rapprocher de ce cas de figure idéal, il faut donc disposer au préalable d'un spectre intégré de l'objet pour pouvoir filtrer les raies spectrales et normaliser le flux reçu.

Le principe de la méthode des speckles dispersés est synthétisé sur la figure 4.8. Au foyer d'un interféromètre à 4 télescopes (*I4T*), un découpeur d'image échantillonne la figure d'interférence et permet de tirer un spectre de chacun des speckles. Cette série de spectres constitue un "cube d'informations" (x, y, λ) où x et y sont les coordonnées dans le champ λ la longueur d'onde. On peut calculer pour chaque canal spectral, la transformée de Fourier de l'image monochromatique associée et ainsi obtenir une série d'autocorrélations complexes de la pupille.

La répartition de la phase dans chacune de ces autocorrélations est antisymétrique (*c.f.* figure 4.8), concentrée en 2×6 régions "actives". On construit la courbe d'évolution de la visibilité complexe de ces régions (6 sur les 12) en fonction de la longueur d'onde. Un exemple de telles courbes est donné sur la figure 4.9.

L'ajustement de ces données par le modèle proposé au paragraphe 4.3.6 (*c.f.* équation 4.14) donne une estimation achromatique de la différence de marche de chacune des bases. L'objet de la suite de ce paragraphe est de présenter quelques résultats de performances statistiques de l'algorithme.

4.4.3 Dispersion de la mesure

Signal sur bruit infini

On constate, lors des simulations numériques que même sans introduire de bruit de photon, l'algorithme utilisé ici ne permet pas de converger en une seule itération vers une solution parfaite mais approchée. En effet, la figure 4.10 montre que l'écart-type des mesures augmente linéairement avec l'amplitude des différences de marche en entrée.

Quatre distributions sont présentées avec à chaque fois une série de 100 configurations incluant des erreurs de cophasage aléatoires uniformément distribuées sur quatre domaines d'étendue croissante de 1, 10, 100 et 1000 *nm*. Les raisons de cette non convergence parfaite sont encore à élucider. Pour le moment, je soupçonne des effets d'échantillonnage spatial induits par le découpeur d'image. Néanmoins, on remarque que dans tous les cas, la distribution des erreurs est suffisamment étroite pour permettre de converger vers une bonne solution. Tout est en fait simplement question du nombre de photons disponibles pour la mesure.

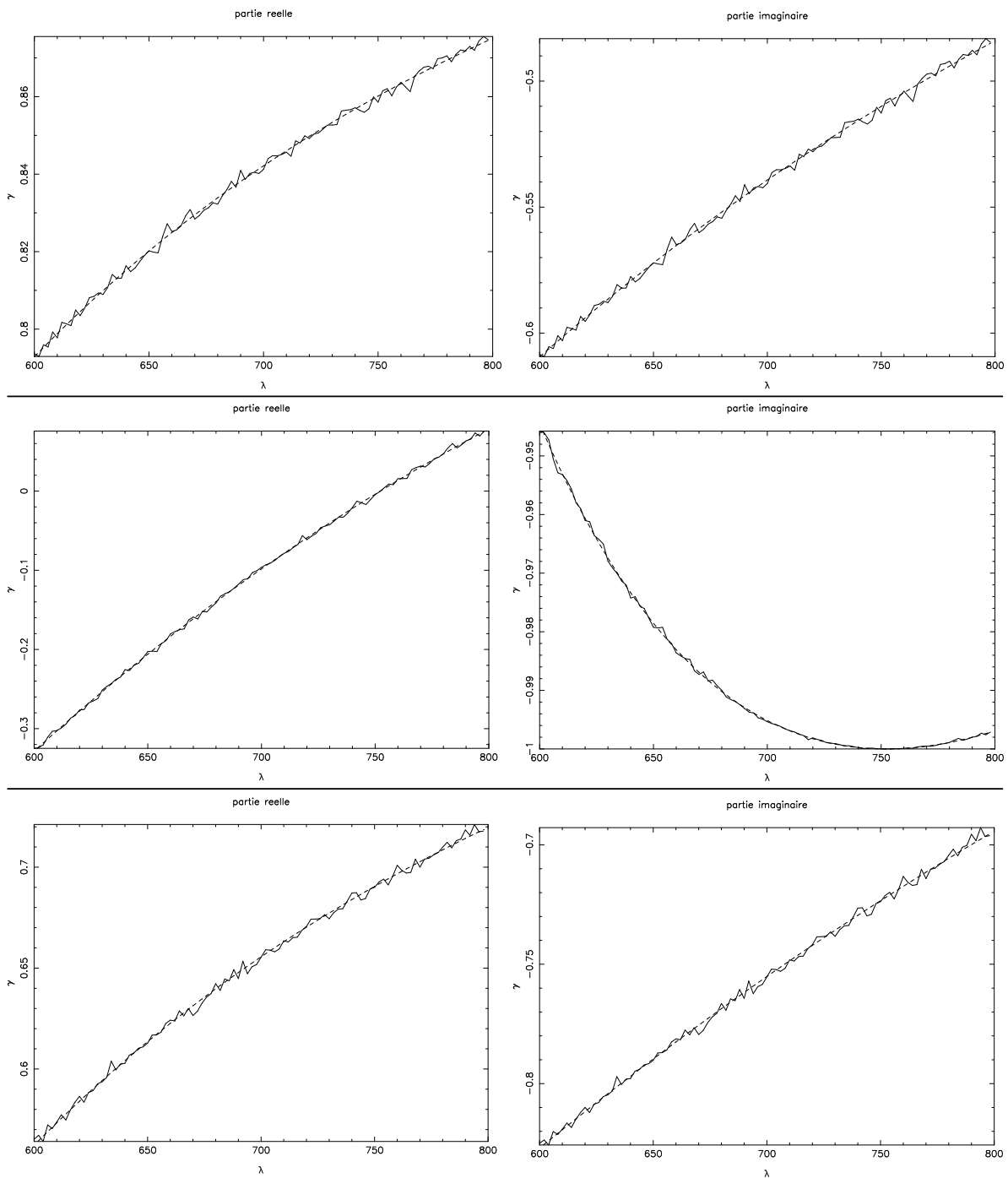


FIG. 4.9 – Evolution de la visibilité complexe (parties réelle et imaginaire) de trois des bases de l'intéféromètre en fonction de la longueur d'onde pour une résolution $R = 350$. Les données brutes, représentées en traits pleins, et dont la qualité est altérée par le bruit de photon, sont ajustées par le modèle proposé, en traits pointillés.

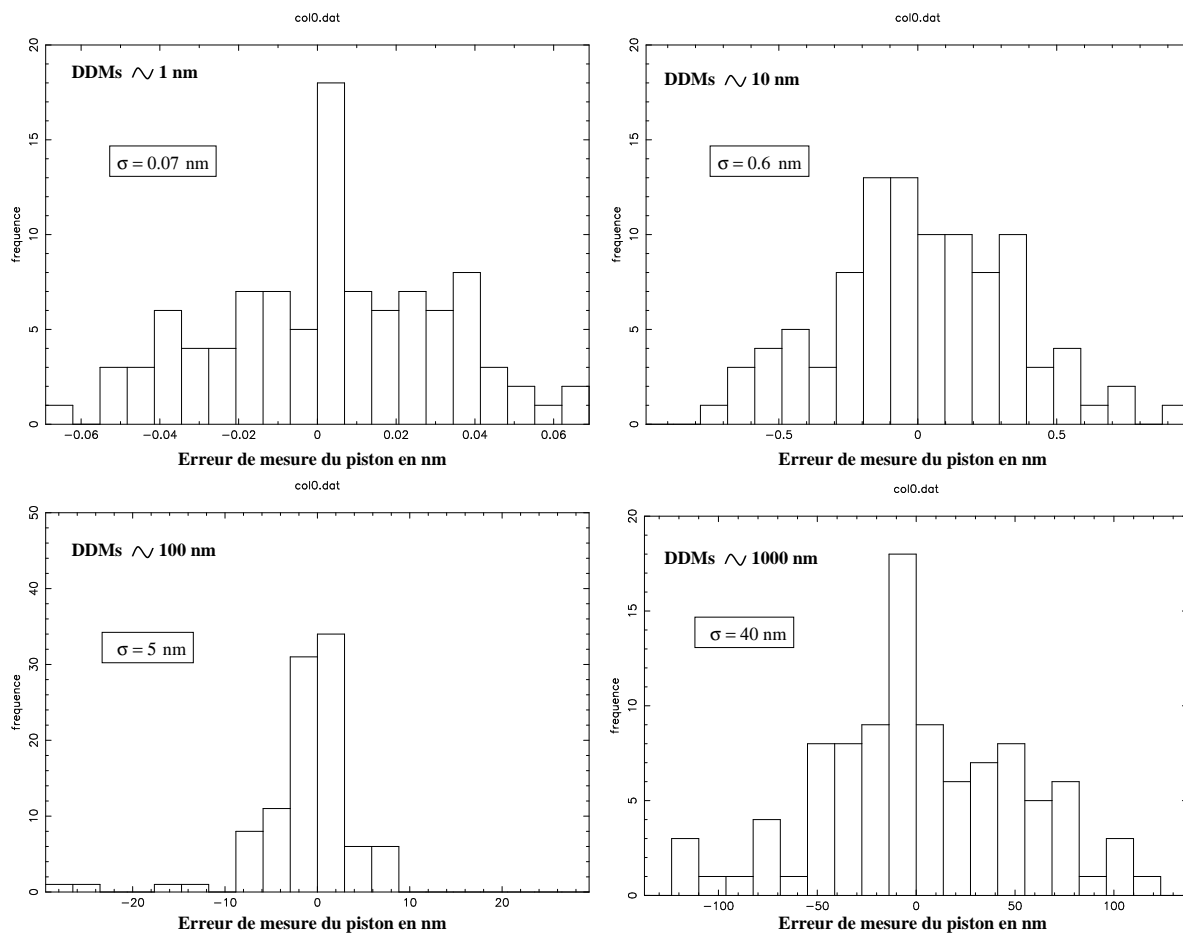


FIG. 4.10 – Dispersion de la mesure des DDMs pour un rapport signal sur bruit infini. La qualité de la mesure est dépend de l'amplitude des chemins optiques à corriger.

Bruit de photon

Le paragraphe 4.3.4 a présenté un modèle simple qui permet d'évaluer l'écart type de la mesure de la phase par transformée de Fourier d'une image monochromatique, en fonction du nombre de photons contenus dans cette image. La phase étant directement proportionnelle à la différence de marche, cette dernière a les mêmes propriétés statistiques. Le fait de combiner plusieurs mesures dans différentes longueurs d'onde réduit l'écart type de la mesure d'un facteur inverse de la racine du nombre de canaux spectraux.

Au final, c'est donc le nombre total de photons N contenus dans les spectres qui limite la précision de la mesure (en nm), variant *a priori* simplement comme :

$$\sigma_\delta = \frac{K}{\sqrt{N}}, \quad (4.15)$$

où K est une constante et N le nombre total de photons. Des simulations de type Monté Carlo de bruit de photon sont en bon accord avec ce modèle et permettent de contraindre la valeur de la constante $K = 4400$. On peut alors rapidement déduire le nombre de photons nécessaires pour obtenir un cophasage de la qualité requise, comme par exemple :

- 4×10^5 pour un cophasage à $\lambda/100$
- 6×10^2 pour un cophasage à $\lambda/4$

Ces valeurs sont en assez bon accord avec celles présentées par [Borkowski *et al.* 2005], qui utilisent le formalisme transformée de Fourier 3D proposé par [Martinache 2004a].

Deux régimes de fonctionnement

La figure 4.11 met en évidence l'existence de deux régimes de fonctionnement de l'algorithme utilisé pour l'analyse de surface d'onde. Pour les grands nombres de photons, on voit que la mesure des différences de marche est limitée par le bruit de l'algorithme de mesure lui-même : le nombre de photons a beau tendre vers l'infini, la dispersion de la mesure sature.

On constate que l'écart type de la mesure est alors uniquement fonction de l'amplitude typique des DDMs à corriger et suit la loi (empirique) suivante :

$$\sigma_\phi \approx 0.05 \times A, \quad (4.16)$$

où A représente l'étendue du domaine de DDM accepté en entrée. A supposer qu'on dispose de suffisamment de photons, on peut converger d'une situation avec un cophasage "gros-sier" de l'ordre du micron à vers une solution meilleure que le nanomètre en quelques (3-4) itérations seulement.

Aux faibles niveaux de signal, on voit que les trois courbes se confondent en une droite de pente $-1/2$, en accord avec le petit modèle proposé au paragraphe 4.3.4 : c'est le bruit de photon qui domine l'erreur sur l'estimation de la différence de marche. On a bien la dispersion de la mesure qui varie comme l'inverse de la racine carrée du nombre total de photons sur le détecteur.

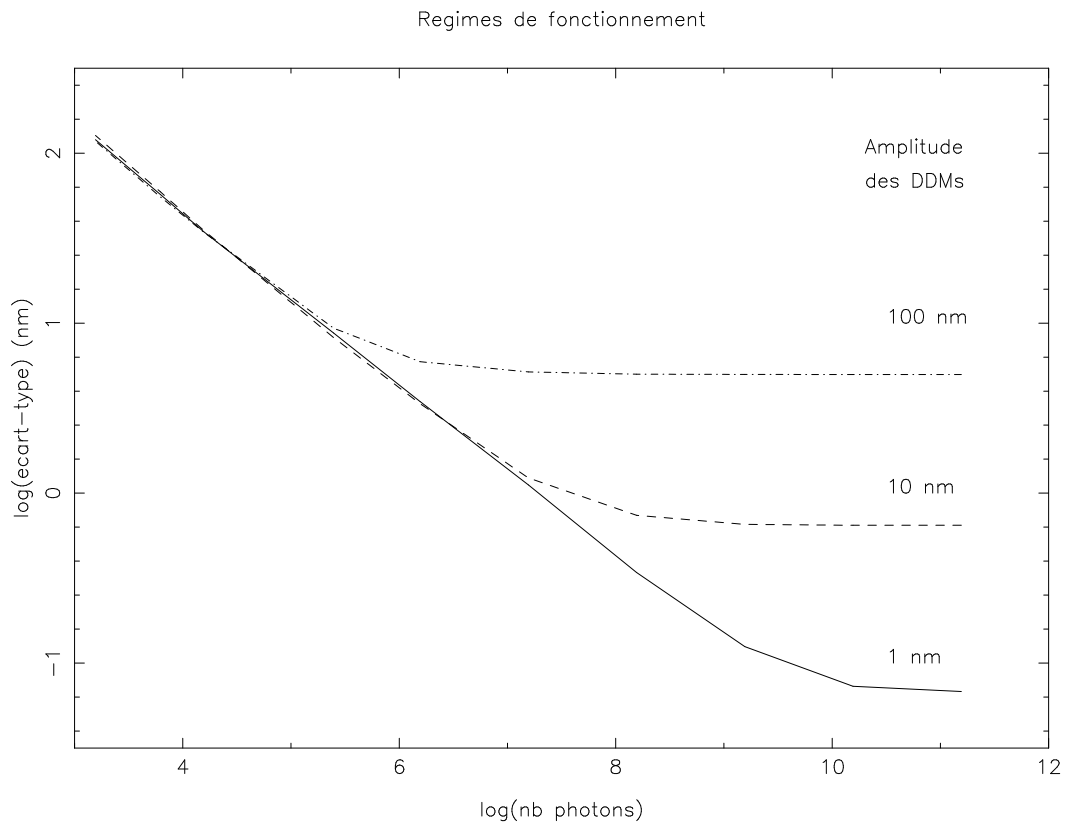


FIG. 4.11 – Diagramme d'évolution de l'écart-type de la mesure en fonction du nombre total de photons sur le détecteur supposé sans bruit (échelle log-log). Mise en évidence des deux régimes de fonctionnement de l'algorithme de mesure des DDMs, dominé par le bruit de photon aux faibles niveaux de signal et par le bruit propre de la mesure aux niveaux de signal élevés.

Cophaser le VLTI ?

Le choix pour cette section simulations d'une configuration à quatre télescopes n'est évidemment pas anodin. Le but de cette étude est de prévoir les performances d'un cophaseur par méthode des speckles dispersés pour l'interféromètre VLTI de l'ESO.

Cette interféromètre constitué de quatre ouvertures de 8 m de diamètre représente une surface collectrice totale de 200 m^2 . Les pertes de lumière induites par les nombreuses réflexions sur les optiques dans le train coudé et les lignes à retard ainsi que lors de l'utilisation d'un éventuel filtrage spatial réduisent cependant la transmission totale à environ 2% seulement, représentant une perte de plus de 4 magnitudes !

Configuration retenue pour le cophaseur : bande spectrale utile allant de 0.6 à $0.8\ \mu\text{m}$, temps de pose $\tau = 5\text{ ms}$. La table suivante résume la qualité de cophasage espérée dans les bandes d'observations V et K en fonction de la magnitude visible de l'étoile.

source		après transmission		limite cophasage	
magnitude	nb ph.	V	nb ph.	V ($0.5\ \mu\text{m}$)	K ($2.2\ \mu\text{m}$)
$V = 6$	$N = 6 \times 10^7$	$V = 10.2$	$N = 1.2 \times 10^6$	$\lambda/120$	$\lambda/500$
$V = 8$	$N = 9.5 \times 10^6$	$V = 12.2$	$N = 2 \times 10^5$	$\lambda/50$	$\lambda/220$
$V = 10$	$N = 1.5 \times 10^6$	$V = 14.2$	$N = 3.1 \times 10^4$	$\lambda/20$	$\lambda/88$
$V = 12$	$N = 2.4 \times 10^5$	$V = 16.2$	$N = 5 \times 10^3$	$\lambda/8$	$\lambda/35$
$V = 14$	$N = 3.8 \times 10^4$	$V = 18.2$	$N = 7.9 \times 10^2$	$\lambda/3$	$\lambda/14$

4.5 Intérêt de l'approche proposée

L'approche proposée dans ce chapitre diffère de celle initialement proposée par Labeyrie dans [Lardière *et al.* 2002] qui a conduit à l'élaboration d'un formalisme "autocorrélation 3D", d'apparence complexe. On se rend maintenant compte que mesurer des DDMs par l'analyse du spectre intégral de la figure d'interférences, équivaut tout simplement à la mesure du terme de phase de la visibilité complexe des franges associée à chaque paire d'ouvertures.

La méthode qui est ici proposée est une approche inverse, d'ajustement de données à un modèle (en *globish*, on parle de *model fitting*). Cette approche implique moins de contraintes instrumentales que l'algorithme "TF3D" qui requiert un ré-échantillonnage régulier des données en inverse de longueur d'onde. Même si la simulation présentée ici reproduit volontairement des conditions très proches de l'expérience de la thèse de [Borkowski 2004], on peut tout à fait envisager de faire, grâce à cette approche inverse, fonctionner la méthode en ne se contentant que de quelques filtres spectraux.

4.6 Toutes les différences de marche

Le paragraphe 4.3.4 sur l'estimation de la dispersion de la mesure, rappelle que, chacun des n télescope de l'interféromètre est impliqué dans $n - 1$ bases. On dispose au final de C_n^2

DDMs qui contraignent la position (en z) de $n-1$ miroirs (*NB : un des miroirs doit forcément être choisi comme référence de mesure*). Cette redondance de l'information doit d'ailleurs être mise à profit pour que l'on puisse augmenter le nombre d'ouvertures de l'interféromètre sans pour autant dégrader la mesure de DDMs.

La bonne utilisation de cette redondance reste cependant encore un problème ouvert. La question peut s'exprimer dans ces termes : comment, à partir de l'autocorrélation d'un nuage de points 3D dont on sait que la projection sur le plan (u, v) est non redondante, retrouver, en optimisant le rapport signal sur bruit, le nuage de points original. L'utilisation d'un algorithme de type Gershberg-Saxton mise à profit dans [Martinache 2004a] est une voie possible, utilisable même lorsque la pupille est redondante, qui nécessite encore d'être approfondie. Une autre possibilité, suggérée dans [Borkowski *et al.* 2005] mais non encore explorée consiste, lorsque la pupille est non redondante, à extraire des sous ensembles de l'autocorrélation, et de calculer une corrélation croisée d'ordre $n - 1$ pour un réseau de n télescopes.

Dans le cas non redondant, le choix le plus raisonnable semble de se contenter, dans un premier temps, de l'exploitation directe d'une fraction des données, avec par conséquent un rapport signal sur bruit d'autant plus mauvais que le nombre de télescopes est élevé et d'utiliser, dans un second temps, ces données comme point de départ pour l'optimisation d'un critère des moindres carrés, permettant une utilisation optimale du signal.

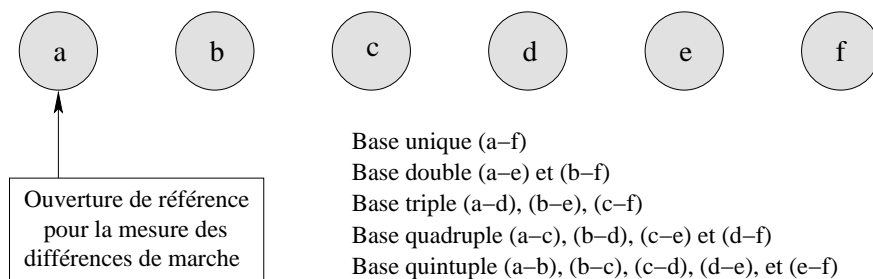


FIG. 4.12 – Exemple simple de réseau redondant où 6 télescopes, sont organisés suivant une maille régulière, en ligne. Chaque télescope est ici identifié par une lettre. Les valeurs de DDMs sont notées $(x - y)$ où (x) et (y) sont les télescopes de la base considérée.

4.7 Cophasage et redondance

4.7.1 La pupille ... redondante ou pas redondante ?

La méthode des speckles dispersés que j’ai présentée dans ce chapitre s’est pour le moment limitée à l’étude des interféromètres dont la pupille (éventuellement réorganisée) n’est pas redondante. En interférométrie optique, les configurations non redondantes sont pour le moment largement préférées : elles permettent en effet, pour un même nombre d’ouvertures, un accès à un maximum de fréquences spatiales (*c.f.* paragraphe 2.2). On a ainsi pu voir, au paragraphe 2.3.1, qu’une bonne couverture du plan (u, v) est une condition essentielle à l’obtention d’images d’objets complexes et étendus.

Néanmoins, selon les cas de figure, il peut être intéressant d’envisager l’utilisation de pupilles redondantes. Ainsi, par exemple, [Aime & Soummer 2003b] montrent qu’une configuration redondante est plus adaptée à la détection d’exoplanètes avec un gain G en signal à bruit, par rapport au cas non redondant, qui varie linéairement avec le nombre de télescopes du réseau ($G = 1.57$ pour 4 ouvertures et $G = 3.53$ pour 10 ouvertures).

Qui plus est, on peut également envisager d’utiliser la méthode pour permettre le cophasage des télescopes à miroirs segmentés de type Keck ou les futurs très grands télescopes (on parlera dorénavant d’ELTs, acronyme de *Extremely Large Telescopes*) et ainsi offrir une alternative aux capteurs capacitifs, situés aux bords des miroirs, qui sont actuellement utilisés. La géométrie hexagonale de ces pupilles fait que la redondance est bien évidemment de la partie.

4.7.2 Speckles dispersés et redondance

Lorsque la pupille est organisée suivant une maille régulière, carrée ou hexagonale par exemple (*c.f.* figure 4.12), une même fréquence spatiale se retrouve échantillonnée plusieurs fois. Cela veut dire que le nombre complexe mesuré par transformée de Fourier d’une image monochromatique (*c.f.* figure 4.4) est la somme de plusieurs visibilité complexes, de module certes identique, mais dont les phases sont différentes.

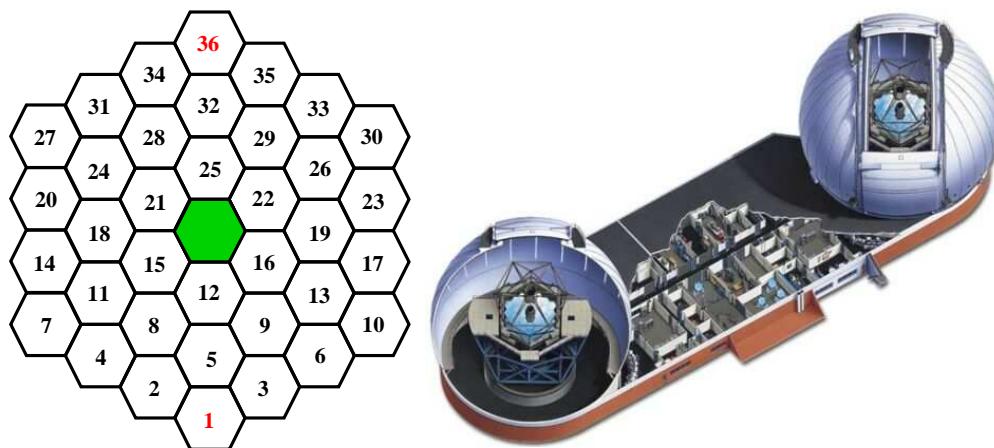


FIG. 4.13 – Numérotation des sous-pupilles d’un miroir segmenté comme les télescopes jumeaux Keck installés au Mauna Kea sur la grande île d’Hawaii. Le segment (1) est choisi comme référence des mesures de différence de marche.

Dans ces conditions, la courbe d’évolution de la visibilité complexe en fonction de la longueur d’onde, dont un exemple est représenté sur la figure 4.5, est alors la somme de plusieurs “pseudo-périodes” de “fréquences” décorréées, chacune étant associée à une unique paire de miroirs. La question est en fait de savoir à quelle paire attribuer chaque différence de marche. On dira dorénavant qu’une base est redondante d’ordre n lorsqu’elle se retrouve n fois sur l’ensemble de la pupille (*c.f.* le recensement des bases fait pour le réseau représenté sur la figure 4.12).

Si la pupille est complètement redondante (*par exemple, si le réseau est organisé suivant une maille rectangulaire où chaque point de la maille est occupé par un télescope*), le problème est dégénéré et n’a tout simplement pas de solution unique. La solution utilisée dans [Martinache 2004a] d’un algorithme itératif de type Gershberg-Saxton ne répond pas vraiment au problème car elle n’échappe pas à la dégénérescence : la convergence, de toute façon lente, qui y est notée, s’explique par le fait que les positions introduites par rapport à la référence sont toutes positives.

Les paragraphes qui suivent sont le résultat d’une réflexion menée avec Deane Peterson [*communication privée, 2004*]. La formalisation algébrique de ce problème est particulièrement pénible aussi par souci d’efficacité, le parti pris est de présenter ce qui ressemble en fait plus à une “recette de cuisine”, appliquée à un exemple bien précis : la pupille segmentée (36 éléments) d’un télescope de type Keck, faite de trois couronnes concentriques de segments hexagonaux, qui est représentée sur la figure 4.13. Le but de la manoeuvre est de mesurer les DDMs de tous les segments relativement au segment (1) choisi comme référence de mesure.

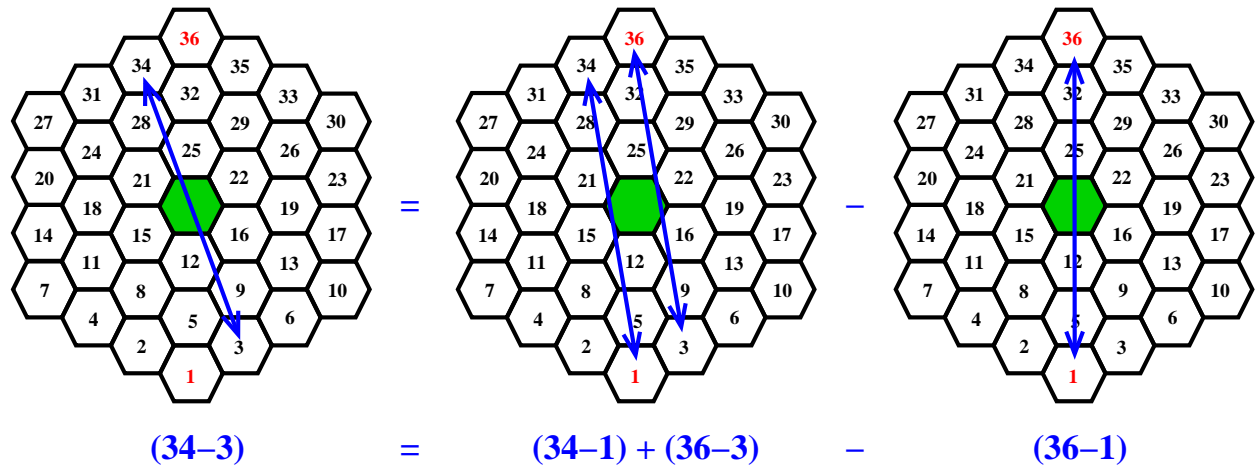


FIG. 4.14 – Méthode de détermination des DDMs symétriques entre deux segments appartenant à la couronne externe de la pupille.

4.7.3 Détermination des DDMs “symétriques”

Rappelons qu’à l’issue de l’utilisation de la méthode des speckles dispersés, on dispose pour chaque base de l’interféromètre des mesures de toutes les DDMs associées, sans cependant pouvoir les attribuer à une paire de télescopes en particulier.

La pupille choisie comme exemple de travail est complètement redondante. Néanmoins, même dans une telle configuration, il est possible d’isoler dans les valeurs de DDMs, celles qui correspondent à une paire de segments situés symétriquement par rapport au centre de la pupille : on les appellera dorénavant “DDMs symétriques”. Trois de ces DDMs symétriques sont d’ordre 1 : ce sont les trois diagonales de l’hexagone $(36 - 1)$, $(27 - 10)$ et $(7 - 30)$ qui sont donc déterminées sans équivoque.

En partant de la connaissance de ces DDMs, on peut prospecter pour les lignes de base voisines, d’ordre 2. Intéressons nous par exemple au doublet $(34 - 1); (36 - 3)$. Une petite manipulation algébrique illustrée sur la figure 4.14 montre que, même si on ne sait pas à quelle paire de miroirs attribuer quelle DDM, on peut calculer la somme des deux valeurs et, grâce à la connaissance de la base $(36 - 1)$ d’ordre 1, déterminer la DDM symétrique $(34 - 3)$. On peut utiliser la même technique en partant du même endroit trouver de façon très similaire la DDM $(35 - 2)$. En partant des deux autres diagonales de l’hexagone, on peut trouver toutes les DDMs symétriques entre segments de la couronne externe de la pupille.

Évidemment, les choses se compliquent à mesure qu’on progresse vers les couronnes intérieures : les bases entrant en jeu sont de plus en plus courtes et par conséquent de plus en plus nombreuses. La connaissance des DDMs de l’étape précédente permet malgré tout de s’en sortir, comme l’illustre la figure 4.15.

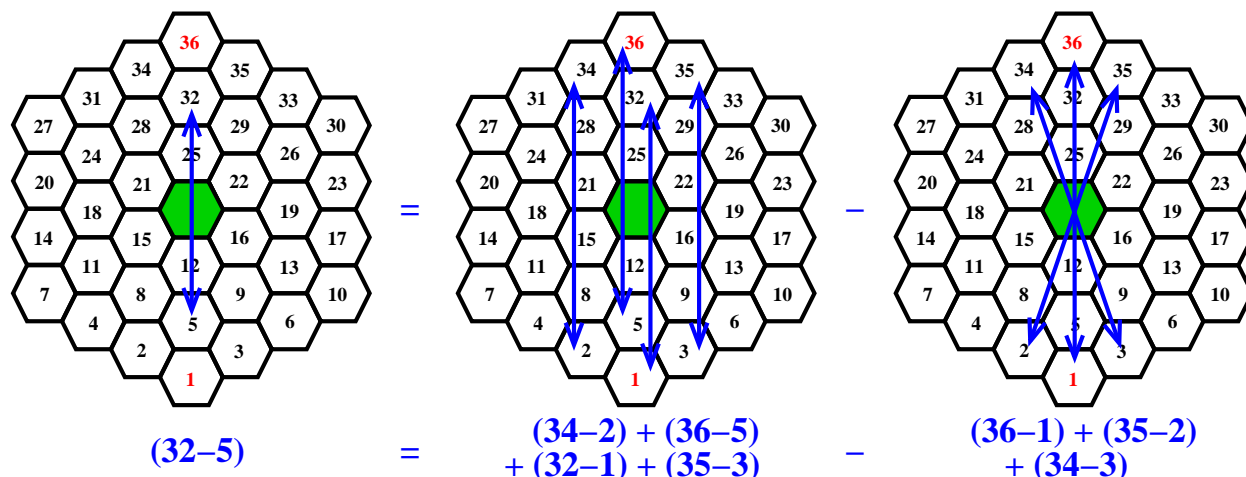


FIG. 4.15 – Méthode de détermination des DDMs symétriques entre segments de la deuxième couronne. La détermination de la DDM (32–5) est possible grâce à la connaissance des DDMs symétriques de la couronne externe.

4.7.4 Cassons gaiement la redondance !

L'étape qui vient d'être décrite n'est malheureusement pas suffisante à la résolution finale du problème. Il est certes, plutôt satisfaisant de voir que malgré la dégénérescence du problème, une partie de l'information est accessible. Néanmoins l'aventure s'arrête là et aucun autre progrès n'est possible sans l'emploi d'une astuce.

Le “truc” employé tient en fait une fois de plus de la reconfiguration de la pupille. La reconfiguration proposée ici est cependant beaucoup plus simple que ce qui a déjà été évoqué puisqu'elle consiste tout simplement à masquer un des segments. Dans le cas de notre pupille exemple, on choisit de masquer le segment (27) (*c.f.* figure 4.16). Le masquage de ce seul segment s'avère être suffisant pour lever la dégénérescence du problème ! Il est à noter que le masquage a d'autant moins d'impact sur la mesure des DDMs que les segments composant la pupille sont nombreux.

La figure 4.16 illustre la technique qui permet, lorsqu'un segment est masqué, de déterminer la DDM de tous les autres segments par rapport au segment référence (1). La technique est faite de deux étapes que nous allons détailler : une première étape de détermination du segment “pivot” et une seconde étape de résolution des DDMs par rapport à la référence.

Détermination du “pivot”

La base (27–1) qu'on fait disparaître en masquant le segment (27) et qui était, avant masquage, d'ordre 4 devient d'ordre 3. L'addition des trois DDMs restantes peut être réécrite :

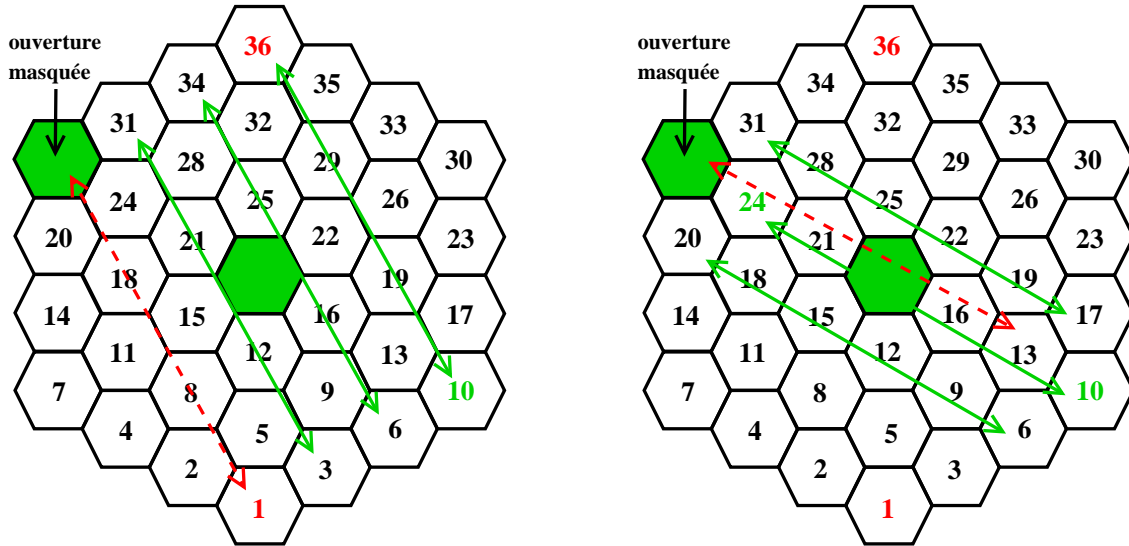


FIG. 4.16 – À gauche : masquage du segment (27) et détermination de la DDM (*par rapport à la référence* (1)) du segment symétrique (10). À droite : ce segment est utilisé comme “pivot” grâce auquel on détermine les DDMs (*par rapport à la référence* (1)) de tous les autres segments. Voir l’explication dans texte du document.

$$(31 - 3) + (34 - 6) + (36 - 10) = (31 - 6) + (34 - 3) + (36 - 10), \quad (4.17)$$

c’est à dire, sous la forme d’une somme de deux DDMs symétriques connues (*c.f.* étape précédente) et d’une DDM inconnue qu’on peut donc déterminer. La position du segment (36) par rapport à la référence étant connue, on en déduit la position du segment (10), symétrique du segment masqué, qu’on baptise “pivot”.

Résolution des DDMs

Dès lors qu’on dispose du pivot, la DDM d’une ouverture s’opère de la façon suivante : il suffit de faire le compte des bases identiques à celle reliant le pivot au segment dont on veut déterminer la DDM. La figure 4.16 illustre le cas de la détermination du segment (24). Comme précédemment, l’addition des DDMs peut être réécrite comme la somme de DDMs symétriques, connues :

$$(24 - 10) + (20 - 6) + (31 - 17) = (24 - 10) + (20 - 17) + (31 - 6), \quad (4.18)$$

qui nous permettent donc de déterminer la position du segment (24). Cette opération peut être appliquée pour tous les segments dont la position est alors déterminée sans équivoque : le problème est résolu.

4.7.5 Conclusion sur la redondance

On voit que la redondance de la pupille, qui a toujours été présentée comme un obstacle majeur à la généralisation de la méthode des speckles dispersés apparaît finalement comme un simple raffinement algébrique. La dégénérescence du problème d'attribution des différences de marche mesurées par la méthode des speckles dispersés est complètement levée par le masquage d'une seule sous ouverture. Dans l'exemple qui a été présenté, on aurait tout aussi bien pu choisir masquer l'ouverture (36), symétrique de la référence, (1), qui cumulerait alors les fonctions de référence et de pivot. A l'issue de toutes ces manipulations algébriques, on peut donc attribuer chaque DDM mesurée par le traitement speckles dispersés à une unique paire de segments.

Bien évidemment, en pratique, une telle "cuisine" ne peut conduire qu'à une solution fortement bruitée. Néanmoins, la solution que l'on vient de fabriquer peut servir de point de départ dans la minimisation d'un critère des moindres carrés ou dans un algorithme de type Gershberg-Saxton, permettant une utilisation optimale de l'information collectée par le spectrographe.

Des expériences numériques par Peterson (*communication privée, 2004*) pour différentes configurations complètement redondantes laissent conjecturer que quelle que soit la complexité de la pupille, seules deux solutions "consistantes" (*i.e.* qui donneraient un résultat indentique par analyse de speckles dispersés) dans l'attribution des DDMs aux bases sont possibles. En excluant le cas trivial de la centro-symétrie de la solution (la couverture du plan (u, v) est en effet centro-symétrique), on constate que pour quatre ouvertures sur un carré, une simple ou une double couronne hexagonale, seules deux solutions subsistent. Il est en fait facile de choisir entre la bonne et la mauvaise solution dans la mesure où seule la bonne conduira à une amélioration des images!

Dans ce qui est proposé ici, on masque quand même un segment, ce qui veut dire qu'on dégrade (du moins pour le cophasage) la pupille et que le segment masqué n'est par conséquent pas corrigé! Certes, l'impact du masquage est d'autant plus négligeable que la pupille est composée de nombreux éléments. Pour cophaser la totalité de la pupille, on peut faire de la modulation temporelle et alterner les sous-pupilles masquées.

4.8 Article speckles dispersés

Global wavefront sensing for interferometers and mosaic telescopes: the dispersed speckles principle

Frantz Martinache

Laboratoire d'Interférométrie Stellaire et Exoplanétaire, FRE 2215,
04870 Saint Michel l'Observatoire, France

E-mail: martinache@obs-hp.fr

Received 5 September 2003, accepted for publication 24 November 2003

Published 5 December 2003

Online at stacks.iop.org/JOptA/6/216 (DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/010)

Abstract

The piston-sensing algorithm proposed by Labeyrie (Lardière *et al* 2002 *IAU Technical Workshop* vol 266, p 608) for diluted interferometric arrays can be extended to redundant segmented apertures such as those of extremely large telescopes and periodic hypertelescopes (Labeyrie 1996 *Astron. Astrophys.* **118** (Suppl.) 517). We first show that his 'dispersed image' input data cube is the tri-dimensional Fourier transform, in squared modulus form, of a 'wavefront bumpiness' function, a binary function of both aperture coordinates and the local optical path (or piston) error. It follows that Labeyrie's output cube is the tri-dimensional autocorrelation of the wavefront bumpiness. Using a tri-dimensional extension of Fienup's (1978 *Opt. Lett.* **3** 1) phase retrieval algorithm, we show through numerical simulations that the multiple peaks appearing in columns of the output cube can be discriminated to retrieve the piston errors. About ten photons are needed per exposure, per sub-aperture and per spectral channel.

Keywords: global wavefront sensing, mosaic telescopes, dispersed speckle

1. Introduction

The basic forms of wavefront sensing, such as the Shack–Hartmann [6, 15] and the curvature algorithm, are unsuitable for mapping piston errors in multi-aperture interferometers or mosaic mirrors lacking edge sensors. This arises from the discontinuities, possibly amounting to many wavelengths, at the edges of the wavefront elements. In recent years, several wave sensing methods have been considered to cope with these discontinuities: Pedretti and Labeyrie [13] have explored a triplet-wise hierarchical arrangement; Cuevas [3] has discussed an extension of curvature sensing; Labeyrie *et al* [10] and Borkowski *et al* [1] have considered a three-dimensional Fourier transform of spectro-imaging data. This ' x, y, k ' method, as they call it, is an extension of the dispersed fringes principle already used by Michelson and Pease [12] and modernized by Koechlin [7]. It requires rather simple optics but the reduction algorithm proposed is not directly applicable to redundant apertures. In this paper, we show

that this algorithm can be extended to deal with redundant apertures such as those of a mosaic mirror or a periodic hypertelescope [8].

The ' x, y, k ' method exploits the chromatic dependence of speckled images. A stack of such images recorded at a series of wavelengths, equispaced in wavenumbers k , gives, through a three-dimensional Fourier transformation, an 'output cube' which contains information on the piston errors. We first show that this cube is a three-dimensional autocorrelation of the wavefront bumpiness map, properly formatted. We exploit this property by performing a 3D Fienup [4] reconstruction. The resulting wavefront sensing is applicable to discontinuous redundant apertures, under some restrictions of symmetry.

2. Autocorrelation formalism

Let us call (x, y) the coordinates of a point in the pupil plane and (u, v) those in the image plane. Classical diffractive optics [5] gives an expression for the amplitude of

a monochromatic wave Ψ_F at the focus of an optical device of focal length f at a wavelength λ :

$$\Psi_F(u, v; \lambda) = \frac{1}{i\lambda f} \iint \Psi_P(x, y) \times \exp\left(-i2\pi\left(\frac{ux}{\lambda f} + \frac{vy}{\lambda f}\right)\right) dx dy. \quad (1)$$

$\Psi_F(u, v)$ is the Fourier transform of the distribution of complex amplitudes $\Psi_P(x, y)$ in the pupil. For a perfect plane wave, $\Psi_P(x, y)$ can simply be written as $\Psi_P(x, y) = P_2(x, y)$ where P_2 is a real function describing the entrance aperture:

$$P_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{inside each pupil} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that we do not consider here the case of apodized apertures for which P_2 would not be a binary function. This is only a convenient simplification with no effect on the results proposed here.

For a plane wave with atmosphere-induced piston errors, this becomes $\Psi_P(x, y) = P_2(x, y) \exp(-i2\pi \frac{z(x, y)}{\lambda})$ where $z(x, y)$ describes the optical path error with respect to a perfect plane wave. The intensity of a monochromatic image can then be written as:

$$|\Psi_F(u, v; \lambda)|^2 = \left(\frac{1}{\lambda f}\right)^2 \left| \iint P_2(x, y) \times \exp\left(-i2\pi\left(\frac{ux}{\lambda f} + \frac{vy}{\lambda f} + \frac{z(x, y)}{\lambda}\right)\right) dx dy \right|^2. \quad (2)$$

We can separate the effect of chromatism on the image into two distinct components:

- The first terms of the argument of the exponential $(1/\lambda f)(ux + vy)$ indicate that the image scales directly with wavelength. This ‘size chromatism’ can be corrected either by a Wynne corrector [16] or by post-detection processing in our case. In the expressions below, this consists of removing the $1/\lambda f$ factor in the argument of the exponential.
- The additional term $z(x, y)/\lambda$ includes the unknown z function. When this function differs from zero, the contributions of the sub-apertures are not in phase and the interference pattern degrades into a set of random speckles. Moreover, due to the wavelength dependence of this additional phase, the speckles are spectrally decorrelated (for piston errors larger than the wavelength). One can use properties of this spectral dependence to recover the z function as with the ‘ x, y, k algorithm’ [2] extended here to the case of redundant apertures.

As described by Koechlin *et al* [7] for two apertures, Labeyrie *et al* [10] proposed extracting piston errors from the 3D Fourier transform of such a dispersed image arranged as a cube. We show here that this cube is itself a three-dimensional Fourier transform, in squared modulus form, of a three-dimensional wavefront map.

As proposed below, if we correct the size chromatism (and simplify the $1/(\lambda f)^2$ factor), equation (2) can be written as:

$$|\Psi_F(u, v; \lambda)|^2 = \left| \iint P_2(x, y) \times \exp(-i2\pi(ux + vy + wz(x, y))) dx dy \right|^2, \quad (3)$$

where $w = \lambda^{-1}$. As P_2 is a binary (1 or 0) function, it can be expressed as a sum of Dirac functions:

$$P_2(x, y) = \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i, y - y_i). \quad (4)$$

Using this development, the result of the previous integral is simply:

$$|\Psi_F(u, v, w)|^2 = \left| \sum_{i=1}^n \exp(-i2\pi(ux_i + vy_i + wz(x_i, y_i))) \right|^2. \quad (5)$$

A moment’s thought will convince the reader that if we introduce the three-dimensional binary function:

$$P_3(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i), \quad (6)$$

a 3D Fourier transform of this function will give exactly the same result as equation (5), i.e.:

$$|\Psi_F(u, v, w)|^2 = |\text{FT}(P_3(x, y, z))|^2, \quad (7)$$

where FT represents the three-dimensional Fourier transform. This implies that, with size chromatism corrected as described, a set of spectro-images arranged as a (u, v, λ^{-1}) data cube can be considered as the square modulus of the Fourier transform of the three-dimensional aperture (see figure 1). Thus, the inverse Fourier transform of this ‘wavelength-scaled’ data volume is the three-dimensional autocorrelation of the real, binary aperture function $P_3(x, y, z)$. For reference, this autocorrelation, being the Fourier transform of a real function, is complex with even parity for the modulus and odd for the phase.

3. Fienup reconstruction for redundant apertures

For a non-redundant array, the wavefront bumpiness autocorrelation gives quite directly the optical path difference associated with each baseline. Things are more complicated with a highly redundant aperture pattern because for a given baseline (of (x, y) coordinates), there appear not just one but up to p signal dots in each active column along the z -axis, where p is the degree of redundancy of the baseline in the aperture.

A possible approach consists of breaking the redundancy by applying a known piston disturbance to one sub-aperture. One can proceed by adding either a static optical path error larger than the largest piston error or a dynamic piston modulation. The effect of both approaches helps to label a set of points in the autocorrelation, making their identification easier. This ‘offset’ approach is quite unsatisfactory in terms of signal to noise efficiency insofar as only a part of the signal contained in the autocorrelation is used. A more complicated approach, involving modulation of the piston of each telescope, may circumvent this lack of efficiency.

One can also rearrange the pupil as a non-redundant array before wavefront sensing but this prevents us from using the same camera for both analysis and science. Moreover, this can reasonably only be applied to simple redundant arrays.

We have explored a suggestion by Labeyrie [9] to use a 3D extension of Fienup’s algorithm. Fienup [4] proposed applying

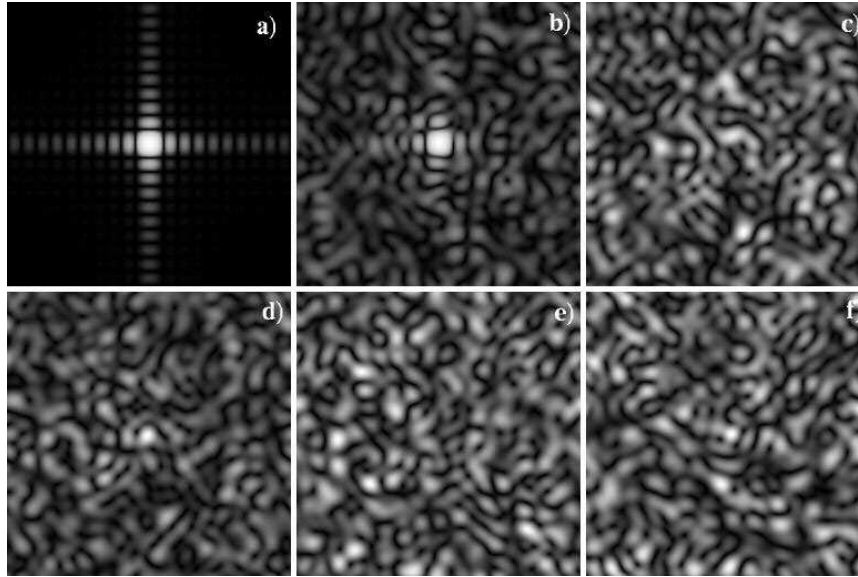


Figure 1. Simulated images illustrating the theoretical principle of the proposed algorithm. A square pupil is made up of 400 points with random piston errors which are contained in a three-dimensional array. These images are cross-sections through the three-dimensional Fourier transform of this array. They resemble what resized pictures would look like, seen at different wavelengths. (a) Shows a perfect image as if taken at infinite wavelength, (b) shows an image at a wavelength approaching the amplitude of wavefront bumpiness, the others show decorrelated speckles with piston errors getting larger and larger as the wavelength decreases. (Images are displayed with attenuated contrast.)

a Gerchberg–Saxton algorithm to retrieve values of a real two-dimensional array knowing only the modulus of its Fourier transform (or equivalently its autocorrelation). We apply this algorithm to the dispersed image, i.e. the three-dimensional stack of monochromatic images arranged as (u, v, λ^{-1}) in the input array. Indeed, as mentioned previously, this array can be considered as the Fourier transform, in square modulus form, of the entrance aperture, which means that we can use it to retrieve the three-dimensional entrance aperture and build the wavefront bumpiness map everywhere in the telescope’s aperture.

3.1. What the third dimension brings

The original Fienup algorithm applies to an object that can be expressed as a two-dimensional function:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n z_i \delta(x - x_i, y - y_i), \quad (8)$$

where n is the number of elements in the array. The autocorrelation of this function, equivalent to the square modulus of its Fourier transform, has a generic expression:

$$F(x, y) = \sum_{k,l=1}^n z_k z_l \delta(x - (x_k - x_l), y - (y_k - y_l)), \quad (9)$$

where $(z_i)_{i=1}^n$ is the unknown vector, whose components are mixed up in this autocorrelation. In fact, this function describes a 2D surface in a 3D space.

However, we argue that the 3D approach introduced above can produce substantial simplifications. In this case, the

function described as:

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i) \quad (10)$$

contains the same information but the square modulus of its Fourier transform leads to the (u, v, λ^{-1}) array. In turn, its autocorrelation is easier to manipulate and has separated components of the vector $(z_i)_{i=1}^n$:

$$F(x, y, z) = \sum_{k,l=1}^n \delta(x - (x_k - x_l), y - (y_k - y_l), z - (z_k - z_l)). \quad (11)$$

Notice here that for a non-redundant entrance aperture, this autocorrelation immediately gives the optical path differences for all baselines. Indeed, in the autocorrelation, an active (i.e. non-zero) point of (x, y, z) coordinates indicates that the baseline of vector (x, y) exhibits an optical path difference, z .

However, in the more general case of a redundant array of sub-apertures, this autocorrelation considered alone is useless. It is indeed impossible to distinguish contributions of identical baselines from each other. A 3D adaptation of Fienup’s algorithm has been successfully used to overcome this difficulty.

3.2. Algorithm principle

We recall here the general principle proposed by Fienup with special features required in our case (see the block diagram in figure 3). Let $g_k(x, y, z)$ be a guess of the wavefront to be reconstructed for the k th iteration and $G_k(u, v, w)$ its three-dimensional Fourier transform. These are contained in two 3D arrays: the ‘object’ and its ‘image’. G_k has to conform

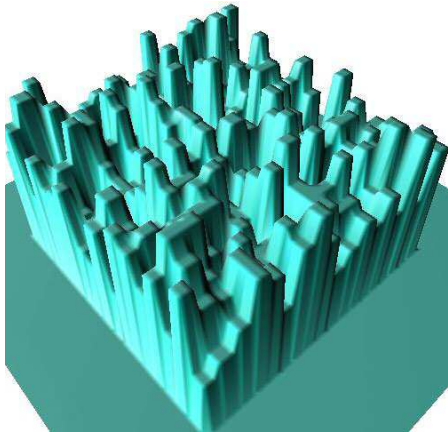


Figure 2. Example of a reconstructed bumpiness function. The 20×20 element wavefront is accurately reconstructed with a 3D adaptation of the Fienup algorithm.

to the observed squared modulus F so if $G_k = |G_k|e^{i\Phi_k}$, it is converted to $G'_k = |F|e^{i\Phi_k}$.

The inverse Fourier transform of this is a new modified wavefront called g'_k . One has to choose the best constraints to apply to g'_k to accelerate the convergence towards the right solution. The chosen ones are the following:

- $g'_k(x, y, z) = 0$ if the point of coordinates (x, y) is located outside the pupil.
- $g'_k(x, y, z)$ must be real and positive elsewhere.

which gives us a new estimate for the $(k + 1)$ th iteration.

For each iteration, we can compute the variance of $|F| - |G_k|$, which evaluates the difference between the (u, v, λ^{-1}) cube that would be obtained by the guessed wavefront and the real set of spectro-images, to control the convergence of the process.

3.3. Results

Figure 2 shows results of a 3D Fienup reconstruction of a wavefront using a completely redundant square aperture with random piston errors (the one which gave monochromatic images presented in figure 1). Its dimensions (x, y, z) are $(20, 20, 16)$ in a whole cube of $(32, 32, 32)$ that provides good sampling in the Fourier domain (better when the dimensions of the object are small compared to the array's) but keeps the array size modest.

The results are encouraging. For random piston errors with a uniform density and noise free data, the reconstructed wavefront is identical to the actual one. We notice, however, that the convergence speed changes depending on the original random pupil that is simulated.

It first seemed interesting to change the set of constraints on the reconstructed aperture so as to accelerate the convergence, by allowing the aperture only to be a binary function. It turns out that this constraint is too strong for the algorithm and prevents its convergence. These convergence speed variations are not understood yet and we are investigating possible causes.

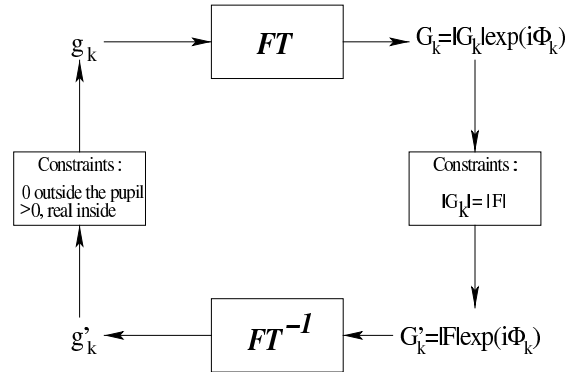


Figure 3. Block diagram of the Fienup algorithm.

Moreover, since a three-dimensional function $f(x, y, z)$ and its centro-symmetrical $f(-x, -y, -z)$ have the same Fourier transform modulus, the algorithm may equally converge on either solution. This ambiguity can be circumvented simply by breaking the symmetry of the pupil, for example on a classical monolithic telescope by taking advantage of the presence of a three-armed spider structure, which naturally breaks the centro-symmetry.

3.4. Noise sensitivity

The sensitivity of this wavefront sensing method must be explored in terms of photon noise. To simulate photon noise, one replaces the theoretical expected number of photons of each pixel in the dispersed image cube by a Poisson distributed random number. One determines the minimal number of photons needed for the algorithm to converge towards the correct solution.

These simulations have been made with 64 to 784 sub-apertures, distributed as a square array such as shown in figure 2. The most interesting result is that over this range, the number of photons needed is directly proportional to the number of sub-apertures, with a proportionality constant of about 200 photons per sub-aperture, using 32 wavelength channels. Thus, the limiting magnitude is invariant with the number of sub-apertures, if their size is fixed.

As the output information of the algorithm is a value of z for each aperture, the needed information is simply proportional to the number of apertures, and so is the number of recorded photons. It seems therefore not surprising to note that the minimum number of needed photons is invariant with the number of sub-apertures, even if this assumption still has to be demonstrated. Whether inversion methods differing from the Fienup algorithm could require fewer photons remains to be explored [2].

3.5. Adaptive optics

The high number of iterations needed to recover the wavefront from scratch (sometimes up to 1000) makes us wonder if it is applicable to ground-based adaptive optics in its raw version. Convergence is faster if the time increment between two adaptive corrections is so small that changes on the phase screen are of low amplitude. Using the wavefront of the previous step as entrance data for the next step of the Fienup

F Martinache

reconstruction dramatically accelerates the convergence and prevents it from converging on the spurious centro-symmetric solution. Therefore, the main difficulty is to initially start the algorithm.

There are several ways to make it easier to start. One could for example start with a non-redundant mask on the pupil for which (x, y, λ^{-1}) immediately gives optical path differences and add some more elements at each step until completion of the array covering.

4. Conclusion

In this paper, we have demonstrated that a set of size-chromatism-corrected spectro-images of a non-resolved source, arranged as a (u, v, λ^{-1}) cube, is the squared modulus of the three-dimensional Fourier transform of the real three-dimensional function describing the wavefront bumpiness map.

It follows that this property can be used to retrieve the wavefront bumpiness map, using for instance the 3D Fienup algorithm proposed, even for a highly redundant aperture such as in the case of extremely large telescopes or hypertelescopes. The method is applicable to the global phasing of discontinuous apertures for which classical approaches such as those of Shack–Hartman [6, 15] and Roddier [14] are impossible to implement. If used for the mosaic mirrors of extremely large telescopes, having a usable reference star in their field, the method may suppress the need for edge sensors attached to the mirror segments.

The problem which has been solved here is still too ideal and in the future some attention must be given to finding an adaptation of the method to real data. Indeed, working with a finite wavelength bandwidth and with finite resolution will necessarily induce complications in the interpretation of the reconstructed wavefront because of convolution effects that will have to be taken into account.

Acknowledgment

The author is grateful for the advice and the critical readership of Deane Peterson.

References

- [1] Borkowski V *et al* 2002 A wavefront analysis algorithm for multi-aperture interferometers and hypertelescopes *Proc. 36th ESLAB Symp.* vol 514, p 273
- [2] Borkowski V *et al* 2003 Sensitivity of the ‘dispersed speckles’ piston sensor in multi-aperture interferometers and hypertelescopes *Astron. Astrophys.* in preparation
- [3] Cuevas S 2002 AO curvature system for segmented primary telescopes *IAU Technical Workshop* vol 266, p 568
- [4] Fienup J R 1978 Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform *Opt. Lett.* **3** 1
- [5] Goodman J 1996 *Introduction to Fourier Optics* (New York: McGraw-Hill)
- [6] Hartmann J 1900 Bemerkungen uber den Bau und die Justirung von Spektographen *Z. Instrumentenk.* **20** 47
- [7] Koechlin L *et al* 1996 Dispersed fringe tracking with the multi- r_0 apertures of the grand interféromètre à 2 télescopes *Appl. Opt.* **35** 3002
- [8] Labeyrie A 1996 Resolved imaging of extra-solar planets with future 10–100 km optical interferometric arrays *Astron. Astrophys.* **118** (Suppl.) 517
- [9] Labeyrie A 2003 private communication
- [10] Labeyrie A *et al* 2002 Adaptive optics for ground based hypertelescopes *ESO Conf. Workshop Proc.* vol 58, p 109
- [11] Lardièrè O *et al* 2002 Sites and adaptation phasing for 1–10 km hypertelescopes *IAU Technical Workshop* vol 266, p 608
- [12] Michelson A and Pease F G 1921 Measurement of the diameter of alpha Orionis with the interferometer *Astron. J.* **53** 249
- [13] Pedretti E and Labeyrie A 1999 A hierarchical phasing algorithm for multi-element optical interferometers *Astron. Astrophys.* **137** (Suppl.) 543P
- [14] Roddier F 1988 Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics *Appl. Opt.* **27** 1223–5
- [15] Shack P V and Platt B C 1971 Production and use of a lenticular Hartmann screen *J. Opt. Soc. Am.* **61** 656
- [16] Wynne C G 1979 Extending the bandwidth of speckle interferometry *Opt. Commun.* **28** 21

Chapitre 5

Coronographie

5.1 Introduction

C'est tout de même un incroyable concours de circonstances qui fait que la Lune peut de temps en temps complètement occulter le Soleil lors d'éclipses totales et ainsi permettre d'observer sa couronne. Pendant de nombreuses années, ces éclipses ont été la seule occasion d'observer l'environnement proche du Soleil (*c.f.* figure 5.1). On peut par exemple citer la très célèbre confirmation de la théorie de la relativité générale d'Einstein lors de l'éclipse totale de Soleil de mai 1919. Il a fallu attendre les années 30 pour que soit mis au point le système qui permet de se passer des éclipses. Bernard Lyot de l'Observatoire de Meudon baptise son invention coronographe et la met rapidement à profit pour étudier la couronne solaire [Lyot 1932]. L'incroyable film "Les flammes du Soleil", sorti à la fin des années 50 en la mémoire de Bernard Lyot est une compilation de plusieurs de ses observations qui montre au grand public l'impressionnante activité de notre étoile préférée.

Dans les années 80 émerge l'emploi du coronographe de Lyot pour observer les environnements circumstellaires. Le problème est toutefois sensiblement différent : en effet, à la différence du Soleil dont le diamètre apparent est d'un peu plus d'un demi degré, les étoiles sont avec l'essentiel des moyens actuellement disponibles, des objets non résolus de quelques millisecondes d'arc. Dans une telle configuration, la taille optimale du masque de Lyot atteint presque $4\lambda/d$. On est encore loin de prétendre accéder aux exoplanètes, qu'on imagine beaucoup plus proches de leur étoile, mais on voit peut observer des disques circumstellaires comme celui entourant l'étoile β -Pictoris [Smith & Terrile 1984].

1997 apparaît alors le premier d'une nouvelle génération de coronographes stellaires utilisant des masques de phase. [Roddiier & Roddiier 1997] proposent en effet de remplacer le masque occulteur traditionnel des coronographes de Lyot par une pastille beaucoup plus petite (diamètre de l'ordre de $0.5\lambda/d$) déphasant la lumière d'une demi onde. Viennent ensuite, développés de façon indépendante, les concepts "jumeaux" de couteau de phase [Abe *et al.* 2001] et de coronographe à 4 quadrants [Rouan *et al.* 2000]. Avec ces concepts, le masque de phase n'est plus fait d'une pastille de phase circulaire centrée sur l'étoile mais



FIG. 5.1 – Eclipse totale de Soleil du 21 juin 2001 vue depuis la Zambie (photographie par Olivier Lardière). Malgré l’invention du coronographe de Lyot, l’observation des éclipses naturelles motive encore bien des voyages !

d’un damier qui découpe le champ en 4 quadrants et qui en déphase deux sur quatre de π . Ces concepts ont fait l’objet des thèses de [Abe 2002] et [Riaud 2003].

La principale difficulté apparaissant avec l’utilisation de masques de phase est le chromatisme. On a déjà pu distinguer ensemble deux effets distincts de taille et de phase du chromatisme (*c.f.* paragraphe 4.3.1). Les coronographes de type couteau de phase sont insensibles au chromatisme de taille et un effort a été fourni pour achromatiser le déphasage induit par les masques focaux sur une bande spectrale finie. Pour les masques de phase circulaire, une proposition pour l’achromatisation consiste à utiliser un masque fait de deux (voire plus) zones concentriques induisant chacune des déphasages différents, le tout étant optimisé pour produire une bonne extinction de l’étoile centrale sur une bande plus large [Soummer *et al.* 2003].

Avec l’utilisation de ces masques de phase, le coronographe se profile alors de plus en plus comme un système interférométrique dont la mission est de produire des interférences destructives sur une petite région du champ. Un formalisme général rigoureux décrivant les coronographes selon ce point de vue est présenté dans [Aime *et al.* 2002] et [Soummer *et al.* 2002]. C’est ce formalisme qu’on va utiliser comme point de départ.

Il serait enfin inconvenant d’oublier le cas du coronographe interférentiel achromatique,

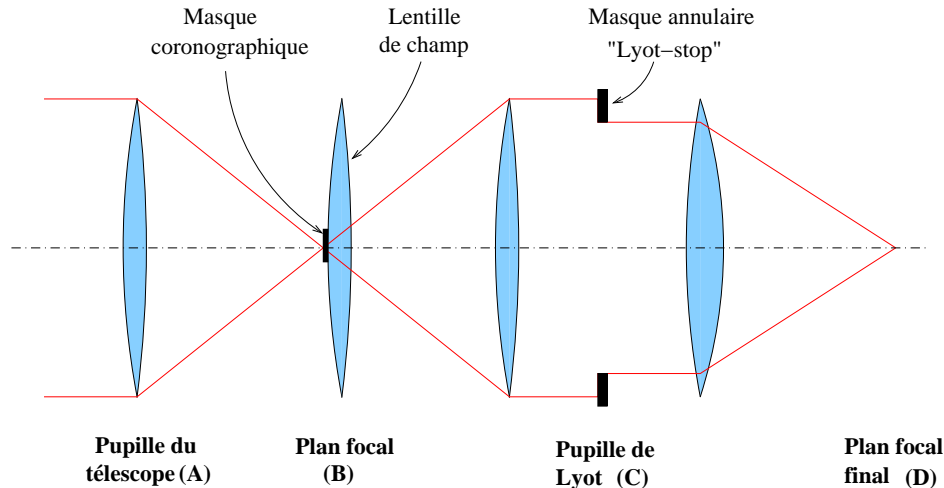


FIG. 5.2 – Les 4 plans remarquables de la coronagraphie : après la pupille d’entrée (A), on trouve un premier plan focal (B) dans lequel on place un masque, ici porté par une lentille de champ. Cette dernière recrée une image de la pupille (C). On y place un masque annulaire, souvent appelé “Lyot-stop”, qui filtre la lumière diffractée par le premier masque. L’étoile est alors supprimée de l’image finale (D).

proposé par [Gay & Rabbia 1996]. Ce dernier, est dérivé d’un interféromètre de Michelson dont un des deux bras subit une rotation ainsi qu’un déphasage achromatique de π en étant focalisé sur un miroir. Ce coronographe pour lequel l’interférence a lieu en plan pupille sort un peu du cadre de cette discussion. Le lecteur intéressé par cet astucieux concept est renvoyé à la lecture de la thèse de [Baudoz 1999] qui lui est dédiée.

5.2 Le principe hérité de Lyot

La figure 5.2 est une illustration du concept de coronographe mis au point par Lyot en utilisant un masque absorbant et réutilisé ensuite par Roddier & Roddier, cette fois ci avec une pastille π -déphasante. Cette famille de coronographes se caractérise par l’utilisation d’un masque à deux étages : le premier, situé dans le plan image filtre la partie centrale de la tache d’Airy et le second, en plan pupille, filtre les anneaux.

L’utilisation de l’optique classique de Fourier s’est jusqu’ici avérée suffisante pour pouvoir décrire ce qui se passe dans les coronographes. Néanmoins, les objectifs de contraste pour la recherche des exoplanètes sont tels ¹ que la prise en compte de propagation de la lumière à des distances finies apparaît comme une nécessité pressante non encore assouvie !

On se placera toutefois dans le cas où l’approximation de Fourier reste valide. Du formalisme développé par Aime et Soummer, on tire une équation simple qui relie la distribution d’amplitude complexe dans le plan (A) à celle dans le plan (C) avant le passage par le

¹on se plaît en effet à rêver de contrastes de 10^{10} à 10^{12} !

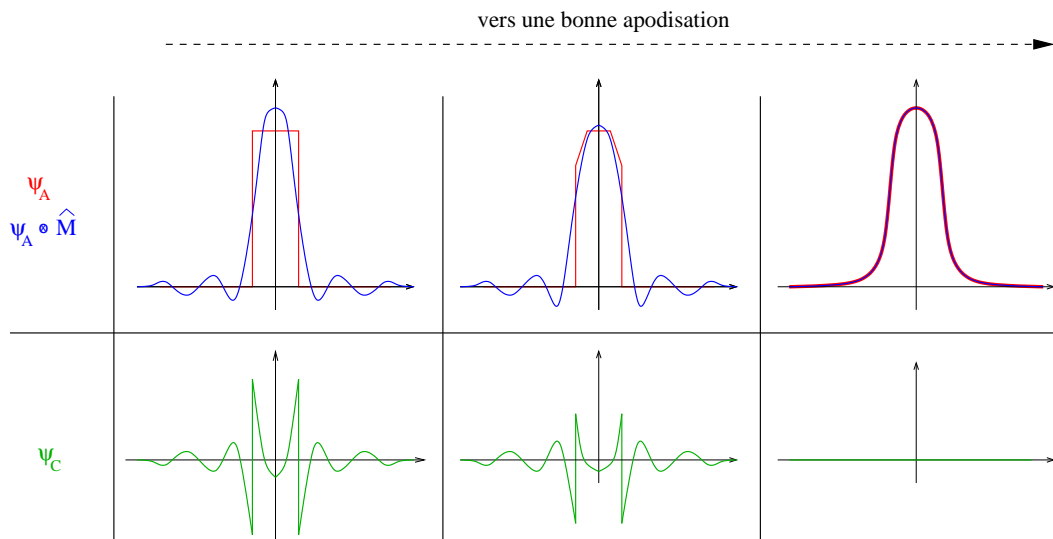


FIG. 5.3 – Minimisation de la différence entre les 2 ondes interférant dans un coronographe : mise en évidence de l’effet d’une apodisation de la pupille d’entrée du coronographe.

Lyot-stop :

$$\psi_C(x, y) = \psi_A(x, y) - \epsilon \psi_A(x, y) \otimes \hat{M}(x, y), \quad (5.1)$$

où ψ_A et ψ_C représentent les amplitudes complexes dans les plans pupille concernés, \hat{M} la transformée de Fourier de la forme du masque (*i.e.* une fonction d’Airy) et \otimes représente l’opération de convolution. ϵ apparaît comme un paramètre fondamental décrivant le type de masque utilisé : $\epsilon = 1$ correspond au cas d’un masque absorbant de Lyot et $\epsilon = 2$ au cas d’un masque de phase de Roddier & Roddier.

Avec cette équation simple, la coronographie apparaît clairement comme un processus interférentiel : l’onde de la pupille de sortie du coronographe est déterminée par la différence entre une onde directe et cette même onde convoluée par le masque occulteur. Optimiser un coronographe revient donc à chercher à minimiser cette différence, intégrée sur toute la pupille. Cette vision met du coup assez facilement en évidence la limite de la coronographie “simple” : si la fonction qui décrit l’amplitude complexe dans la pupille d’entrée est à bord francs, cette différence intégrée ne peut jamais être nulle.

La figure 5.3 illustre dans le cas d’un coronographe de Lyot quelques cas de calcul de la différence entre ces deux ondes. On se rend compte que l’on ne peut minimiser cette différence entre une fonction à bord nets et une autre un peu “émoussée” par l’opération de convolution sans changer le profil de transmission de la pupille en l’émoussant lui aussi.

Cette opération de modification du profil de transmission de la pupille s’appelle une *apodisation*². L’apodisation de la pupille a pour effet de diminuer l’énergie contenue dans les

²apodiser vient du grec et signifie littéralement couper les pieds !

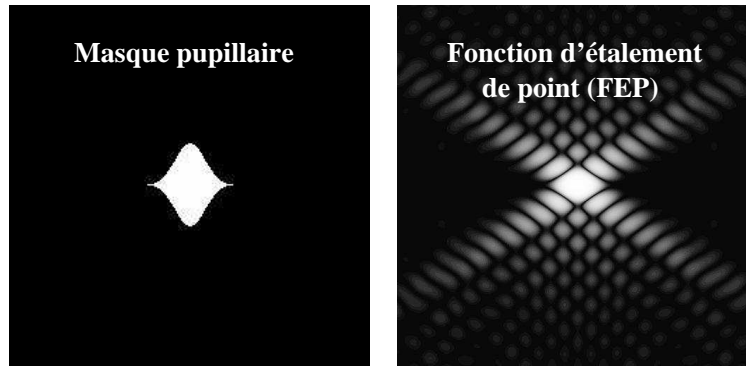


FIG. 5.4 – Exemple d’apodisation par mise en place d’un masque pupillaire binaire. La géométrie de ce masque, proposé par [Jacquinot & Roizen-Dossier 1964] crée dans le champ, très près du centre, des régions où le niveau de speckles est très bas, permettant la détection d’éventuels compagnons proches.

anneaux de la tache d’Airy dans le plan image, au prix d’un élargissement du lobe principal de cette même tache et donc *a priori* d’une perte de résolution.

Avec [Aime & Soummer 2003a], on voit même qu’optimiser le profil d’apodisation (toujours en cherchant à annuler l’équation 5.1) revient à résoudre un problème d’équations aux valeurs propres. Ils montrent que les fonctions propres, solutions de cette équation sont des fonctions prolates sphéroïdales. La résolution de ce problème permet de trouver une solution parfaite dans le cas d’un coronographe à masque de phase de Roddier & Roddier. Pour un coronographe de Lyot, seule une solution approchée est disponible. La question est maintenant de savoir comment en pratique réaliser cette apodisation.

5.3 Apodisation par contraste de phase

Il existe un certain nombre de propositions visant à apodiser une pupille en plaçant un masque à la géométrie adaptée dans un plan pupille. En effet, l’emploi d’une pupille carrée [Nisenson & Papaliolios 2001] ou de forme plus exotique [Jacquinot & Roizen-Dossier 1964] permettent en effet d’atteindre des contrastes avantageux dans certaines régions du champ (voir par exemple la figure 5.4). Le principal défaut de ces techniques est la perte de lumière pour toutes les sources du champ induite par ce masquage de la pupille : la transmission typique de ces techniques avoisine en effet seulement 10%. Il paraît tout de même plutôt incongru de mettre en orbite télescope de quelques mètres de diamètre si c’est pour jeter près de 90% des photons collectés ! Malgré cela, leur avantage indéniable est leur insensibilité aux erreurs de pointage du télescope : nous verrons un peu plus loin dans ce chapitre à quel point cet aspect est critique. Quoi qu’il en soit, l’idée de départ de ce travail était de produire une apodisation sans perte de lumière, en utilisant les propriétés du contraste de phase mis au point par [Zernike 1934].

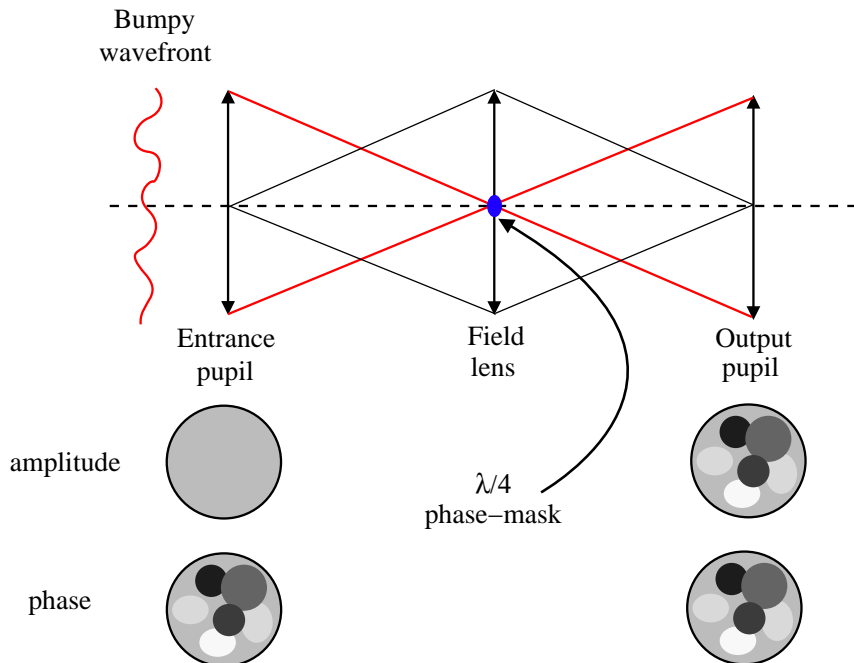


FIG. 5.5 – Technique du contraste de phase : une information de phase est convertie en amplitude par une pastille quart d’onde placée dans un plan image.

5.3.1 Le contraste de phase

Le contraste de phase est une puissante technique de métrologie du front d’onde qui consiste à transformer l’information de phase du front d’onde, *a priori* inaccessible, en amplitude, enregistrable sur un détecteur. Considérons pour cela $\psi(x, y)$ la fonction d’amplitude complexe décrivant le front d’onde en provenance d’une source ponctuelle. Maintenant, soit $\Phi(x, y)$ la fonction qui décrit la phase de l’onde. Si cette phase reste suffisamment petite, et en l’absence d’ombres volantes, on peut écrire au premier ordre que :

$$\phi(x, y) = e^{i\Phi(x, y)} \approx 1 + i\Phi(x, y). \quad (5.2)$$

L’onde résultante dans un plan image, s’écrit comme la transformée de Fourier \mathcal{F} de l’expression précédente :

$$\hat{\phi}(x, y) = \mathcal{F}(e^{i\Phi(x, y)}) \approx \delta(x, y) + i\mathcal{F}(\Phi(x, y)). \quad (5.3)$$

Maintenant, si on place au centre du champ un masque déphasant de $\pi/2$, le dirac de l’expression précédente se trouve lui aussi multiplié par i , solution de l’équation $i^2 = -1$. Ainsi, lorsqu’on reforme une pupille derrière ce masque (*c.f.* figure 5.5), l’amplitude complexe s’écrit alors (au facteur global i près) :

$$\phi(x, y) = 1 + \Phi(x, y). \quad (5.4)$$

Si on place un détecteur dans ce plan, il va donc mesurer :

$$\phi(x, y) = |1 + \Phi(x, y)|^2 \approx 1 + 2\Phi(x, y). \quad (5.5)$$

Avec ce modèle simple, on voit que l'information de phase est intégralement traduite en amplitude (et donc en intensité par le détecteur). Le contraste de phase, fût initialement mis au point par Zernike comme une amélioration du test de Foucault des miroirs de télescopes permettant de faire une mesure absolue de la phase. Zernike a reçu le prix Nobel pour l'application de son invention à la microscopie.

5.3.2 Apodisation par contraste de phase

Labeyrie (*communication privée, 2003*) a astucieusement suggéré d'utiliser le contraste de phase pour générer une apodisation adaptée. A condition de respecter la condition de validité du développement au premier ordre (*c.f.* équation 5.2), un miroir déformable peut en effet être utilisé pour générer une aberration optique qu'on convertit en amplitude avec un masque quart-d'onde. L'emploi d'une telle optique déformable permet *a priori* de créer une apodisation prolata qui optimise la réjection du coronographe situé en aval. Il faut toutefois rattraper cette aberration, transmise par l'apodisation, pour produire un front d'onde parfaitement corrigé avant de rentrer dans un coronographe.

On peut toutefois également se contenter d'une apodisation prolata approchée qui sans être optimale, améliore sensiblement les performances du coronographe. Dans ce cas de figure, un montage très simple, qui n'utilise pas de miroir déformable est possible. Ce montage, baptisé PIZZA pour *Phase Induced Zonal Zernike Apodization*, consiste simplement à apodiser en défocalisant le masque de phase de Zernike [Martinache 2004c]. En effet, cette défocalisation est équivalente à l'introduction d'un terme de phase quadratique dans la pupille :

$$\Phi(r) = \alpha r^2, \quad (5.6)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance (normalisée) à l'axe optique et α le coefficient de Zernike quantifiant l'aberration de défocus.

Le montage proposé sur la figure 5.5 fait évidemment lui même penser à un coronographe de type comparable à ceux qui viennent d'être évoqués. On peut en fait même tout à fait utiliser le formalisme de la coronographie : il suffit pour cela d'introduire une nouvelle valeur du paramètre $\epsilon = 1 - i$ [Martinache 2004b] dans l'équation 5.1. On dispose alors une description analytique complète de l'apodisation.

5.4 Article PIZZA

PIZZA: a phase-induced zonal Zernike apodization designed for stellar coronagraphy

Frantz Martinache

Laboratoire d'Interférométrie Stellaire et Exoplanétaire, Observatoire de Haute Provence, 04870 Saint Michel l'Observatoire, France

E-mail: martinache@obs-hp.fr

Received 22 April 2004, accepted for publication 7 July 2004

Published 16 July 2004

Online at stacks.iop.org/JOptA/6/809

doi:10.1088/1464-4258/6/8/012

Abstract

I explore here the possibilities offered by the general formalism of coronagraphy for the very special case of phase contrast. This technique, invented by Zernike, is commonly used in microscopy, to see phase objects such as micro-organisms, and in strioscopy, to control the quality of optics polishing. It may find application in telescope pupil apodization with significant advantages over classical pupil apodization techniques, including high throughput and no off-axis resolution loss, which is essential for exoplanet imaging.

Keywords: coronagraphy, apodization, exoplanet, Fourier optics

1. Introduction

Much effort has recently been expended in attempting to find the optimal optical method for imaging exoplanets. One of the most promising approaches combines a coronagraph and a pupil apodizer (Aime *et al* 2002, Aime and Soummer 2003).

Guyon (2003) has proposed a practical realization of pupil apodization using reflections on two aspheric mirrors. His phase-induced amplitude apodization (PIAA) redistributes the light in the exit pupil so that the energy contained in the wings of the point spread function (PSF) is dramatically reduced.

This paper presents another approach of phase-induced amplitude apodization based on the properties of Zernike's phase contrast. The aim of this technique, commonly used by opticians to control the micro-bumpiness of mirrors, is to convert phase aberration into amplitude using a $\pi/2$ phase mask. It works for an on-axis source and thus only affects the central part of the field (Martinache 2004), in contrast to classical pupil apodization (CPA) techniques.

We explore analytically the case of a square-law apodization applied to a perfect telescope observing an unresolved star. This is not a prolate spheroidal apodization, known to be optimal (Soummer *et al* 2002), but it is easier to implement with the coronagraphic optics considered, which

induces no resolution loss for off-axis sources, unlike other apodization techniques.

One should mention here that, like all coronagraphic devices, PIZZA has a performance depending strongly on wavefront quality. Indeed, a challenging issue in stellar coronagraphy for exoplanet imaging is dealing with the huge contrast, of the order of 10^{10} , of an exo-Earth and its parent star in the visible range. One must therefore achieve 'extreme wavefront correction' for any of the existing coronagraphic solutions to work properly. Several options have been considered to cancel the residual speckled stellar background with adaptive phase corrections either before the coronagraph, as in the case of the 'dark hole' method (Malbet *et al* 1995), or inside the coronagraph, using either multiple stages of phase smoothing in the image with DC blocking in the pupil (Labeyrie 2002), or interference of the rejected stellar light to destroy the residual speckles. The latter methods exploit the light usually lost due to the mask, for accurate wavefront sensing in a Mach-Zehnder interferometer (Codona and Angel 2004) or adaptive holographic wavefront correction (Labeyrie 2004).

Section 2 shows the optics proposed for quadratic apodization. In section 3 I show that the classical formalism of Lyot and Roddier–Roddier coronagraphy can be extended to describe the Zernike apodizer. Using this formalism, I

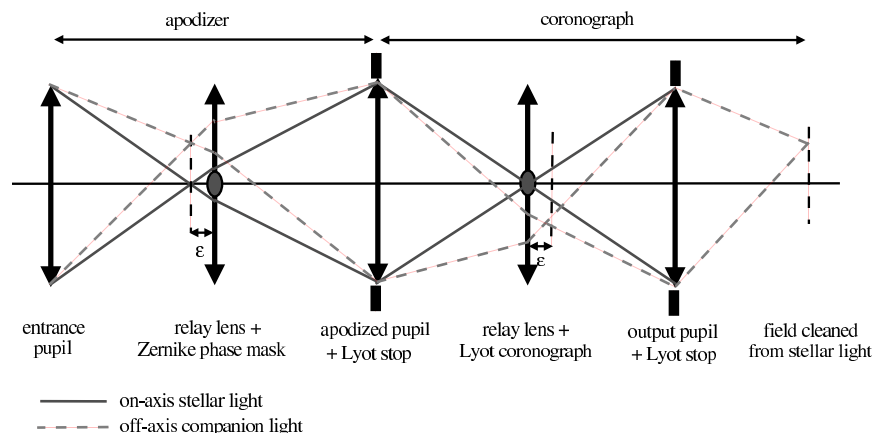


Figure 1. The optical train of a PIZZA apodized Lyot coronagraph. The solid line represents the on-axis light of the star being observed and the dashed line represents the beam from a companion of the star. A 90° phase-shifting mask is slightly displaced axially by ε , with respect to the focal plane. This causes a complex apodization of the stellar wave, affecting both its amplitude and phase. The companion wave is unaffected since it does not cross the phase mask. Part of the stellar light is diffracted out of the pupil and is absorbed by an annular Lyot stop. The two waves do not focus in the same plane and the coronagraph must therefore be displaced. The Lyot coronagraph which follows is slightly defocused to account for the ε shift.

calculate in section 4 the expected performance of such a device, before reaching conclusions and giving a discussion in section 5. I give some analytical solutions in the appendix for interested readers.

2. Description of the technique

2.1. The optical set-up

Labeyrie (2003) proposed using phase contrast to generate pupil apodization. The original idea was to use slightly aberrant optics, within Rayleigh's tolerance, to convert the phase pattern into a modulus pattern with phase contrast. This makes it possible to generate prolate spheroidal apodization, now known to provide the optimal apodization profiles for coronagraphy.

One can also perform the apodization using approximate prolate functions (Aime *et al* 2001). The optical arrangement proposed here is designed to induce a square-law apodization, by introducing a slight amount of defocus. (The resulting apodization is not exactly parabolic, but since the equations exhibit a quadratic dependence of the radial coordinate, I shall refer to it as a square-law apodization.)

This is easily achieved with a phase mask located slightly before or after the focal plane as sketched in figure 1. This displacement of the phase mask adds to the classical Fourier transform a Fresnel propagation term that corresponds to the introduction of a phase modulation in the pupil plane following a quadratic law. A 90° phase mask located in the field converts this aberration into an amplitude map in a relayed image of the entrance pupil (see figure 2). The transmitted aberration has to be compensated downstream by displacing some of the optics.

2.2. Properties of the PIZZA technique

The main difference here compared to CPA techniques that use an amplitude mask located in the pupil plane (Jacquinot and Roizen-Dossier 1964, Nisenson and Papaliolios 2001 or

Kuchner and Spergel 2003), is the presence of a phase mask in the image plane. This allows making a selection from sources of the field to be apodized, exactly as a coronagraph does.

The PIZZA technique thus exhibits properties that may be adapted for use with a stellar coronagraph:

- It induces no angular resolution loss for off-axis sources since they are unaffected by the apodization.
- There is no flux loss except on-axis loss, in which part of the light is diffracted out of the pupil.
- The whole field is usable for detecting companions at distances larger than λ/d with a translation-invariant PSF.
- The technique is insensitive to the presence of a central obscuration or a spider structure supporting the secondary mirror.

These properties and the obvious connection with a coronagraph suggest adapting the coronagraphic formalism to phase contrast. It indeed provides a powerful analytic description of what happens in this apodizer.

3. Formalism of phase contrast

3.1. Extension of the coronagraphic formalism to any phase mask

To simplify the notation, I use a one-dimensional description of the wavefront. Adapting to a full circular aperture requires using Bessel functions of the first kind instead of cardinal sine functions and using the properties of Hankel transforms, as was done by Soummer *et al* (2002) in the case of coronagraphy. x is the transverse coordinate. It varies from $x = -\frac{1}{2}$ to $\frac{1}{2}$.

As shown by Bonneau *et al* (1975), the amplitude distribution in a relayed image of the aperture after a Lyot absorbing mask may be considered as the complex amplitude difference between the uniform undisturbed wave and the wave diffracted by the mask.

This notion was developed by Aime *et al* (2002) into a general formalism for describing coronagraphic systems.

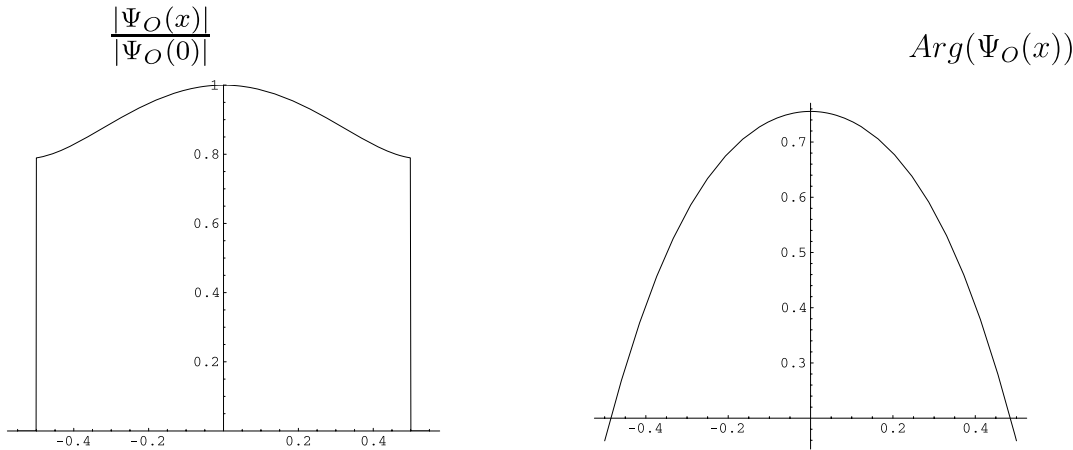


Figure 2. The apodization profile resulting from the PIZZA process for the parameters $a = 0.5$ and $\alpha = \pi/2$. On the left is sketched the normalized modulus of the wave inside the apodized pupil and on the right, the transmitted defocus. Both result from the slight axial displacement of the phase mask with respect to the focal plane. One thus needs to defocus the Lyot absorbing mask correspondingly, as sketched in figure 1.

From this formalism, one can extract a simple equation that relates the complex amplitude of the waves entering the telescope with those reaching the reimaged output pupil behind a phase mask, as shown in figure 1. In the monochromatic case,

$$\Psi_O(x) = \Psi_E(x) - \epsilon \Psi_E(x) \otimes \hat{M}(x), \quad (1)$$

where Ψ_E and Ψ_O respectively represent the complex amplitudes in the entrance pupil and in the output pupil, \hat{M} the Fourier transform of the mask shape and \otimes a convolution. ϵ is a fundamental parameter that takes several values depending on the nature of the mask placed in the field. The two classical values are: $\epsilon = 1$ corresponding to the Lyot absorbing mask; and $\epsilon = 2$ corresponding to a Roddier π phase mask. I now propose to add the value $\epsilon = 1 - i$, where i is the positive solution of $i^2 = -1$, which describes the case of a $\pi/2$ phase mask, used for phase contrast.

3.2. The Zernike case

Defocusing the phase mask is equivalent to inducing a quadratic phase distribution in the entrance pupil:

$$\Psi_E(x) = \Pi(x)e^{-i\alpha x^2}, \quad (2)$$

with $\Pi(x) = 1$ if $|x| \leq \frac{1}{2}$ and 0 otherwise, where α a parameter that characterizes the amount of defocus. If α is small, one can proceed to a first-order expansion of equation (2):

$$\Psi_E(x) \approx \Pi(x)(1 - i\alpha x^2). \quad (3)$$

Then, one can explicitly derive the \hat{M} function. Let a be the diameter of the phase mask, given in units of the Airy diameter. In our one-dimensional description of the process, \hat{M} is simply

$$\hat{M}(x) = a \operatorname{sinc}(\pi ax) = \frac{\sin(\pi ax)}{\pi x}. \quad (4)$$

Introducing these last two expressions in equation (1) leads to the following:

$$\Psi_O(x) = \Pi(x)(1 - i\alpha x^2) - (1 - i)\Pi(x)(1 - i\alpha x^2) \otimes \frac{\sin(\pi ax)}{\pi x}. \quad (5)$$

As shown in the appendix, equation (5) may be expressed in terms of the sine integral function:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt. \quad (6)$$

3.3. Retrieving the classical phase contrast description

We may wonder what the simplifying hypotheses needed to retrieve the classical description of strioscopy are. If the size of the mask is very small compared to λ/D , where D is the diameter of the aperture, the sinc function may be taken as constant over the whole output pupil; the mask then acts as a low pass filter. This approximation simplifies the convolution in equation (5):

$$\begin{aligned} \Psi_O(x) &\approx \Pi(x)(1 - i\alpha x^2) - (1 - i)\Pi(x) \\ &= \Pi(x)i(1 - \alpha x^2), \end{aligned} \quad (7)$$

which is the classical result of strioscopy with a phase defect completely transformed into amplitude owing to the $\lambda/4$ phase mask. This is however not a useful approximation for our purposes.

4. Properties of Zernike apodization

Using equation (5) without approximation allows us to study the effect of varying the amplitude of the defocus and the diameter of the phase mask. The necessary (and sufficient) condition for using equation (5) is that the defocus is kept small enough for equation (3) to remain valid.

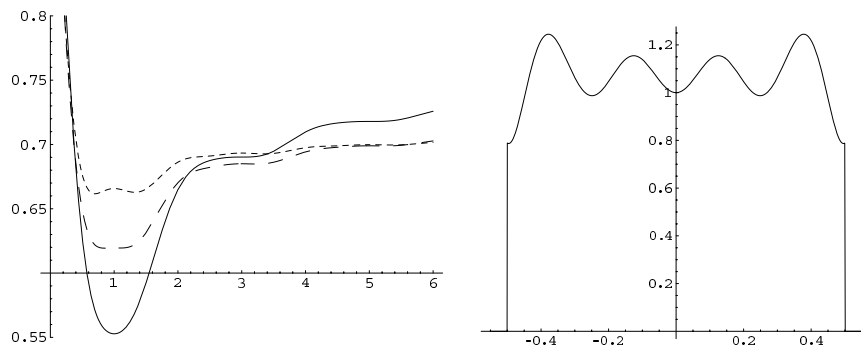


Figure 3. Left: the variation of the pupil's edge attenuation, showing the modulus versus the size of the phase mask (given in units of the Airy diameter) for three values of α : the solid curve is for $\alpha = \pi/2$, the dashed curve is for $\alpha = \pi/4$ and the dotted curve is for $\alpha = \pi/8$. Right: apodization with a mask which is too wide (here, $a = 8$). If $a > 1$, the modulus distribution is no longer monotonic.

4.1. Description of the apodization profile and approximation

As indicated above, equation (5) integrates to give

$$\Psi_O(x) = \Pi(x)(1 - I_1(x; a) + \alpha I_2(x; a)) + i\Pi(x)(I_1(x; a) + \alpha I_2(x; a) - \alpha x^2), \quad (8)$$

where I_1 and I_2 are the integrals given in the appendix.

Figure 2 presents the apodization resulting from equation (8). One sees that the distribution of the complex amplitude is not purely imaginary, contrary to what is usually expected in the classical description of strioscopy, since the phase aberration is transmitted in this output pupil. For small values of phase mask diameter and defocus (see section 4.2), this low amplitude aberration is homothetic to the mask defocus and can be easily corrected by defocusing the coronagraphic mask in the same way as the phase mask (see figure 1).

4.2. Optimization of the apodization

In this formalism for describing the behaviour of the apodizer, there are two free parameters: the diameter of the phase mask a and the amplitude of the defocus α . To characterize the efficiency of the apodizer, I consider the evolution of the amplitude of the wave at the pupil's edge as a function of both parameters.

Figure 3 illustrates the influence of the mask diameter on the apodization profile. As usually occurs with convolutions, the larger the size, the higher the frequencies that are passed and a mask of diameter $a = 1$ Airy diameter seems to have the maximum acceptable size for obtaining a monotonically decreasing profile. When the mask becomes larger, the resulting apodization exhibits quasi-periodic variations, which are not useful for these purposes. Of course, if the size of the mask becomes infinite, the apodization disappears.

Figure 4 sketches how the edge apodization depends on defocus apodization and exhibits the same behaviour for the left part of the curves in figure 3. One sees that there is an optimum value of the defocus (hereafter denoted as α_{opt}) and that the smaller the diameter of the phase mask, the smaller α_{opt} .

To conclude this description of the perfect monochromatic case, it can be said that the necessary condition for getting a monotonically decreasing apodization profile is that one keeps

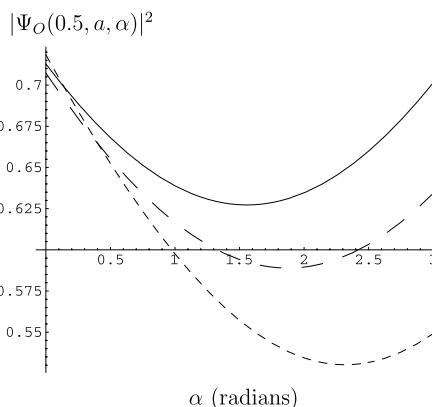


Figure 4. The evolution of the modulus of the wave at the edge of the apodized pupil versus the defocus (the parameter α in our discussion) for three different masks: the solid curve is for $a = 0.5$, the dashed curve is for $a = 1$ and the dotted curve is for $a = 1.5$. The curve is plotted only for low values of α since the approximation of equation (3) has to remain reliable for the description to be correct.

$a < 1$ and $\alpha < \alpha_{\text{opt}}$, while keeping the value of α_{opt} small enough for our simplifying hypothesis to remain valid. Also note that working near the optimum of both parameters will have a stabilizing effect on the resulting apodization.

4.3. Chromatism effects

One now has to consider the different aspects of chromatism that will alter the performance of the apodizer. Chromatism arises at three different levels:

- *The diameter of the diffraction pattern.* The apodizer is made to work perfectly for a central wavelength λ_0 . Let a_0 be the diameter of the pattern that fits to the case $\lambda = \lambda_0$. One thus has to add $a = a_0 \frac{\lambda_0}{\lambda}$ to equation (5) to include this 'size' or 'geometrical chromatism' effect, as it is usually called.
- *The chromatism of the defocus.* Let ε be (see figure 1) the displacement of the phase mask with respect to the focal plane. As previously mentioned, this displacement adds a Fresnel propagation term to the wavefront. The phase

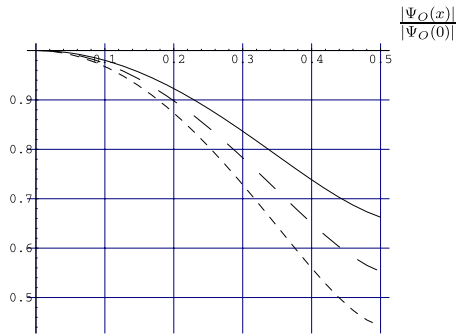


Figure 5. The chromatic dependence of the apodization for $\alpha = \pi/2$ and $a = 1$ including size and aberration and phase mask chromatisms over a $\lambda/\Delta\lambda = 5$ resolution bandwidth. The shorter the wavelength, the stronger the apodization, which may compensate, at least partly, the chromatism of the coronagraphic device, either a Lyot absorbing mask (Lyot 1939) or a Roddier phase mask (Roddier and Roddier 1997), following the apodizer (see figure 1).

parameter α that describes this defocus amplitude is wavelength dependent, following a classical law $\alpha = \alpha_0 \frac{\lambda_0}{\lambda}$. We now refer to this as ‘aberration chromatism’.

- *The chromatism of the phase mask.* Still using the coronagraphic formalism, the ϵ parameter of equation (1) is not exactly $1 - i$ any longer, but becomes $1 - \exp(i2\pi \frac{\delta}{\lambda})$, where δ is the induced optical path. In our case, $\delta = \lambda_0/4$ and $\epsilon = 1 - \exp(i\frac{2\alpha_0}{2\lambda})$. Let us call this ‘phase mask chromatism’.

With this in mind, another glance at figures 3 and 4 is instructive in terms of chromatism. In both figures, the horizontal coordinate is proportional to $1/\lambda$ which means that if the conditions of section 4.2 are met, the edge attenuation will decrease with wavelength.

Confirming this, figure 5 illustrates the global wavelength dependence of the apodization, i.e. with size and phase mask and aberration chromatism being taken into account in equation (5): the shorter the wavelength, the stronger the apodization. Calculations show that the chromatism of the phase mask is the dominating effect.

We thus find here the same limitations present in all phase masks and some practical solutions have already been proposed and implemented to produce achromatic phase shifts: either by transmission using two materials with different wavelength-dependent refractive indexes making the induced optical path difference linear with wavelength or by reflection using a multilayer mirror (Riaud 2003). To get rid of the geometric chromatism, the classical solution is to use a corrector that magnifies the focal image proportionally to $1/\lambda$. (Wynne 1979).

5. Conclusion

The formalism of coronagraphy adapted here to the case of a Zernike phase mask significantly improves the usual description of phase contrast by taking into account some higher order effects, due in particular to the finite size of the mask. The description is of course not limited to pure defocus aberration and may be adapted to any phase modulation.

The formalism provides analytical solutions and shows that a quadratic pupil apodization is achievable by simply defocusing the Zernike phase mask. This PIZZA set-up exhibits significant advantages over CPA, including high throughput, no off-axis resolution loss and a translation-invariant PSF with no field limitation, which is adapted to exoplanet detection. The apodization induced by phase contrast however does not provide a very deep attenuation at the edge, being limited typically to 0.6 in modulus. This attenuation however will improve the stellar nulling if used with a coronagraph (Aime *et al* 2002).

Chromatism is the weakness of this technique, but solutions exist and have been successfully implemented on existing coronagraphs. A possibility, unexplored as yet, would be to use this chromatic apodization to compensate the chromatism of the coronagraph. One can indeed wonder, for instance, in what way the combination of a PIZZA apodizer and a Roddier coronagraph (Roddier and Roddier 1997) differs from a dual-zone phase mask (DZPM) (Soummer *et al* 2003). While the DZPM achieves approximate chromatic compensation directly, as well as defocusing the mask, combining PIZZA and the Roddier coronagraph as two separate stages may offer a similar potential for achromatic operation.

Finally, the same optics may be used as a wavefront sensor since all high order phase aberrations in the pupil are converted into a shadow pattern. One now has to implement practically such a device and see whether it proves useful for stellar coronagraphy in this already dense forest of coronagraphic solutions.

Acknowledgment

The author is grateful for the useful advice and the critical reading of Deane Peterson.

Appendix. About convolution products

I provide here details on two derivations regarding convolution products, which may be of interest to readers:

$$I_1(x; a) = \Pi(x) \otimes \frac{a \sin(\pi ax)}{\pi x}. \quad (\text{A.1})$$

Using the definition of the sine integral function (see equation (6)), one integrates equation (A.1) which leads to

$$I_1(x; a) = \frac{1}{\pi} \left[\text{Si} \left(\frac{\pi a}{2} (1+2x) \right) + \text{Si} \left(\frac{\pi a}{2} (1-2x) \right) \right]. \quad (\text{A.2})$$

The second convolution product is

$$I_2(x; a) = \Pi(x)x^2 \otimes \frac{a \sin(\pi ax)}{\pi x}; \quad (\text{A.3})$$

its integration leads to the following:

$$\begin{aligned} I_2(x; a) = & \frac{x^2}{\pi} \left[\text{Si} \left(\frac{\pi a}{2} (1+2x) \right) + \text{Si} \left(\frac{\pi a}{2} (1-2x) \right) \right] \\ & - \frac{1}{a\pi^2} \cos \left(\frac{a\pi}{2} \right) \cos(a\pi x) \\ & + \frac{2}{a^2\pi^3} \sin \left(\frac{a\pi}{2} \right) \cos(a\pi x) \\ & - \frac{2}{a\pi^2} \sin \left(\frac{a\pi}{2} \right) x \sin(a\pi x). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

F Martinache

In the case where the diameter of the mask is a multiple of the Airy pattern diameter, this last expression can be substantially simplified, such as in the cases $a = 1$ and 2 for which

$$I_2(x; 1) = \frac{x^2}{\pi} \left[Si\left(\frac{\pi}{2}(1+2x)\right) + Si\left(\frac{\pi}{2}(1-2x)\right) \right] + \frac{2}{\pi^3} (\cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x)) \quad (\text{A.5})$$

and

$$I_2(x; 2) = \frac{x^2}{\pi} [Si(\pi(1+2x)) + Si(\pi(1-2x))] + \frac{1}{2\pi^2} \cos(2\pi x). \quad (\text{A.6})$$

References

- Aime C, Soummer R and Ferrari A 2001 *Astron. Astrophys.* **379** 697
 Aime C, Soummer R and Ferrari A 2002 *Astron. Astrophys.* **389** 384
 Aime C and Soummer R 2003 *Astronomy with High Contrast Imaging (Proc. Conf., Nice, May 2002)* (EAS Publications Series vol 8) ed C Aime and R Soummer, pp 79–92
 Bonneau D, Josse M and Labeyrie A 1975 *Image Processing Techniques in Astronomy (Proc. Conf., Utrecht, March 1975)* (Astrophysics and Space Science Library vol 54) ed C de Jager and H Nieuwenhuijzer (Dordrecht: Reidel) pp 403–9
 Codona J L and Angel R 2004 *Astrophys. J. Lett.* **604**L117
 Guyon O 2003 *Astron. Astrophys.* **404** 379
 Jacquinet P and Roizen-Dossier B 1964 *Prog. Opt.* **3** 29
 Kuchner M J and Spergel D N 2003 *Astrophys. J.* **594** 617
 Labeyrie A 2002 *Proc. 36th ESLAB Symp.* vol 514, p 245
 Labeyrie A 2003 private communication
 Labeyrie A 2004 *EAS Publications Series* at press
 Lyot B 1939 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **99** 580
 Malbet F, Yu J W and Shao M 2004 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **107** 386M
 Martinache F 2004 *EAS Publications Series* at press
 Nisenson P and Papaliolios C 2001 *Astrophys. J.* **548** L201
 Riaud P 2003 *PhD Thesis* Université Pierre and Marie Curie, France
 Roddier F and Roddier C 1997 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **109** 815
 Soummer R, Aime C and Falloon P E 2002 *Astron. Astrophys.* **397** 1161
 Soummer R, Dohlen K and Aime C 2003 *Astron. Astrophys.* **403** 369
 Wynne C G 1979 *Opt. Commun.* **28** 21

5.5 La grande famille des coronographes

Le nombre de concepts coronographiques imaginés et en cours de développement pour l'imagerie des exoplanètes ne cesse d'augmenter. Devant cette multiplicité des concepts et des approches, un certain effort a été fournis pour donner un peu de cohérence dans cette recherche de "l'exoplanétographe" idéal. Il s'est notamment tenu, en février 2004, à l'université de Leiden, un atelier réunissant la majorité des protagonistes de ce domaine de la recherche, dont le rapport est téléchargeable sur [astro-ph](#) [Quirrenbach *et al.* 2004].

Plus modestement, [Guyon 2004] propose une classification très simple en deux catégories des techniques d'imagerie à haute dynamique pour un télescope monopupille :

- **Les coronographes "double étage"** pour lesquels la dernière étape de l'extinction de la lumière se fait dans un plan pupille réimagé (*c.f.* plan **(C)** de la figure 5.2) derrière un premier masque occulteur (plan **(B)**).
- **Les coronographes "simple étage"** pour lesquels tout se passe dans le premier plan focal **(B)**.

NB : la classification proposée dans [Guyon 2004] inclut en fait une troisième catégorie de concepts pour lesquels la pupille est décomposée en plusieurs faisceaux distincts. Ces concepts tiennent cependant plus du nulling dont il n'est pas vraiment question ici.

Toute la famille de coronographes stellaires interférentiels à laquelle l'apodisation PIZZA appartient naturellement, fait partie de la première de ces catégories : tous ces coronographes interférentiels sont taillés pour coronographier des étoiles non résolues. Dans le cadre de l'imagerie d'exoplanètes de type Terrestre, on peut se dire que tant que la résolution des télescopes reste modeste, de l'ordre de la dizaine de millisecondes d'arc, cette hypothèse paraît plutôt raisonnable, la dimension des étoiles étant typiquement un ordre de grandeur en dessous. Toutefois, en pratique, la résolution partielle des étoiles, les erreurs de bas ordre de l'optique adaptative et en particulier le pointage du télescope dégradent sérieusement les performances des coronographes qui a ... des fuites.

5.5.1 Fuites coronographiques

La figure 5.6 illustre ce qui vient d'être mentionné dans le cas d'un coronographe à masque de phase de [Roddiier & Roddiier 1997] apodisé. Une apodisation adaptée permet (dans le cas monochromatique) d'avoir une transmission rigoureusement égale à zéro lorsque la source non résolue est placée sur l'axe. Pour les faibles écarts angulaires (jusqu'à $0.5 \lambda/d$), cette courbe de transmission $t(\theta)$, résultat d'une simulation numérique, est très bien ajustée par une simple parabole :

$$t(\theta) = 1.4 \theta^2. \quad (5.7)$$

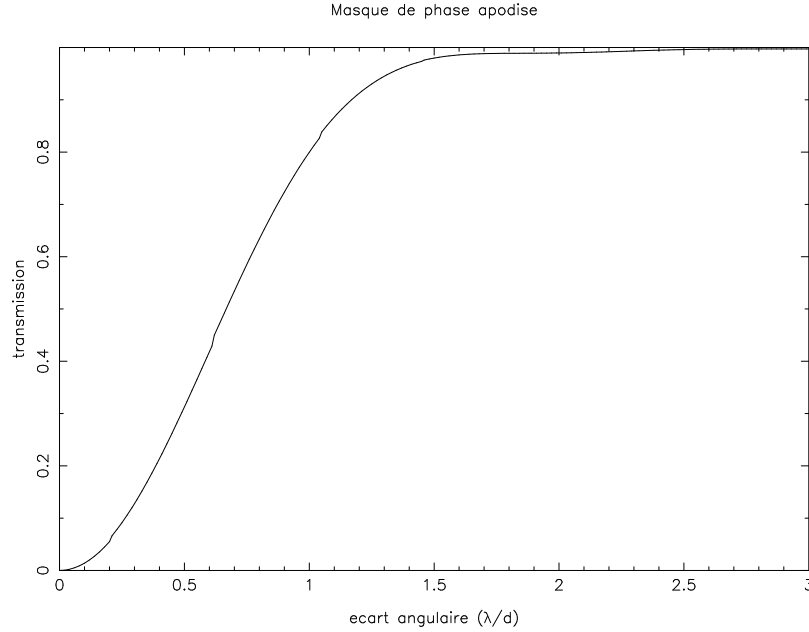


FIG. 5.6 – Courbe de transmission, obtenue par simulation numérique, d’un coronographe à masque de phase de Roddier, avec apodisation de la pupille d’entrée, en fonction de l’écart angulaire de la source.

On parle en effet classiquement de la courbe d’extinction en θ^2 des coronographes. Supposons maintenant que l’on fasse de la coronographie sur une étoile (très) partiellement résolue de rayon angulaire α_* , modélisée par un disque uniforme. On peut alors décomposer l’étoile comme une somme de couronnes concentriques dont la luminosité intégrée croît linéairement avec le rayon de la couronne.

Autrement dit, si on représente l’étoile par un profil radial uniforme de $\theta = 0$ à $\theta = \alpha_*$, le “poids” de chaque point du profil est proportionnel à la position angulaire, soit $p(\theta) = C \times \theta$, où C est une constante imposée par la normalisation de $p(\theta)$ sur tout le profil :

$$\int_0^{\alpha_*} p(\theta) d\theta = 1, \quad (5.8)$$

qui nous conduit à l’expression du profil radial suivant :

$$p(\theta) = \frac{2}{\alpha_*^2} \times \theta. \quad (5.9)$$

C’est l’intégrale du produit entre cette fonction et la fonction transmission du coronographe qui nous permet d’évaluer l’importance de la fuite. Avec le modèle choisi, le terme de fuite F se calcule simplement :

$$F = \int_0^{\alpha_*} p(\theta) \times t(\theta) d\theta = 0.7 \alpha_*^2, \quad (5.10)$$

où α_* doit être exprimé en unités de λ/d . Quelques chiffres : pour un télescope de quatre mètres fonctionnant dans le visible à $0.5 \mu m$, la résolution est de $25 mas$. Le rayon angulaire du Soleil, vu à une distance de $10 pc$ est de $0.5 mas$, soit $0.02 \lambda/d$. On peut, grâce à l'équation 5.10, estimer la fuite du coronographe à $F = 2.8 \times 10^{-4}$! La situation s'aggrave avec un télescope de huit mètres, pour lequel ce terme de fuite s'élève à : $F = 1.12 \times 10^{-3}$!

On voit donc que le terme de fuites du coronographe, même pour une source très partiellement résolue (ici, le rayon angulaire de l'ordre du $1/25^e$ de la résolution) devient rapidement extrêmement gênant, vu les niveaux de contraste requis (de l'ordre de 10^{10}) pour l'imagerie des exoplanètes. Les concepts de la catégorie "double étage", caractérisés par leur courbe d'extinction en θ^2 sont particulièrement affectés par cet effet "irréductible" de résolution partielle de la source.

La même remarque s'applique également vraisemblablement aux techniques de nettoyage cohérent des speckles résiduels de la coronographie, comme par exemple, la correction holographique de [Labeyrie 2004] ou l'utilisation d'un interféromètre de Mach-Zender modifié, proposée par [Codona & Angel 2004]. Cette conjecture mérite toutefois d'être explorée.

5.5.2 Reconfiguration de la pupille et coronographie

Ce problème de fuites dûes à la résolution partielle des sources est d'autant plus sérieux que le diamètre des télescopes augmente. Ceci laisse présager que pour la coronographie dans l'espace au foyer d'un interféromètre (cas de certains scénarii envisagés pour la mission TPF), il faut être particulièrement prudent. Sous cet éclairage nouveau, une reconfiguration anarchique de la pupille, telle qu'elle est proposée par [Guyon & Roddier 2002] (*c.f.* chapitre 2.4.3), qui détruit le champ ne semble plus vraiment faire l'affaire : au foyer d'une telle pupille, un coronographe va certes produire une excellente extinction sur l'axe mais laissera filtrer une fraction conséquente de lumière.

Seules des reconfigurations de la pupille respectant partiellement la géométrie comme l'hypertélescope de [Labeyrie 1996] ou le PIAA de [Guyon 2003] et pour lesquelles une pseudo-image subsiste près de l'axe sont envisageables. Avec une telle reconfiguration, on peut en effet toujours envisager de revenir à l'utilisation du "bon vieux" coronographe de Lyot qui, après tout, lui, a été conçu pour fonctionner sur un objet résolu !

Dans le cas d'un télescope monopupille, on peut changer le profil de transmission du coronographe et passer d'une extinction en θ^2 à une extinction d'ordre plus élevé avec un coronographe simple étage. Le paragraphe qui suit s'intéresse aux performances de l'apodisation PIAA [Guyon & Roddier 2002] mise en oeuvre pour la détection d'exoplanètes de type Terrestre.

5.6 Performances d'un exoplanétographe : le PIAAC

5.6.1 Introduction

La simple donnée du contraste accessible pour une séparation angulaire figée est une donnée bien insuffisante pour évaluer l'intérêt pratique d'un concept pour la détection des exoplanètes. De plus, on vient de voir que la résolution partielle des sources à coronographier, limite les performances théoriquement infinies de bien des concepts à quelque chose de fini.

Dans cette optique, [Martinache *et al.* 2005] suggèrent d'évaluer les performances en terme de probabilité de détection de planète. L'idée est de partir d'une description "réaliste", bien qu'hypothétique, d'un système planétaire simple et de construire la courbe de probabilité de détecter la planète.

5.6.2 Densité de probabilité de présence

Le modèle géométrique simple d'un système étoile-planète construit au chapitre 1 nous a permis de construire la distribution statistique de la probabilité de présence d'une planète "étalon" en orbite circulaire dans le plan luminosité-séparation angulaire. On utilise ici cette densité de probabilité de présence (illustrée sur la figure 1.3) comme entrée principale d'un algorithme d'évaluation des performances de détection du PIAAC. Cette courbe "étalon" doit cependant être modifiée en tenant compte de nouveaux paramètres afin de pouvoir être utilisée :

Le système observé

On fait l'hypothèse qu'une copie conforme de la Terre (*i.e.* diamètre et albédo identiques) est en orbite circulaire sur limite intérieure de la zone habitable d'une étoile semblable au Soleil. Le système est en fait essentiellement caractérisé par trois paramètres :

- la température effective T_\star de l'étoile qui contraint l'étendue de la zone habitable et donc le rayon de l'orbite de la planète, bref : tout pour finir de contraindre le contraste de luminosité en phase pleine entre l'étoile et sa planète.
- la magnitude absolue m_V de l'étoile qui avec la température effective nous permet d'estimer le rayon stellaire pour une étoile de la séquence principale.
- la distance entre ce système et le nôtre qui nous donne la séparation angulaire étoile-planète à élongation maximale ainsi que le diamètre stellaire en millisecondes d'arc.

NB : ces hypothèses de travail sont identiques à celles de [Ebbets et al. 2003] pour l'établissement du catalogue de cibles potentielles de la mission TPF. Ce catalogue a été utilisé pour évaluer les performances d'une version PIAAC de cette mission par [Martinache et al. 2005].

Observant les recommandations des paragraphes précédents, l'étoile est modélisée par un disque uniforme de diamètre angulaire α_\star . La planète est elle, considérée comme parfaitement ponctuelle.

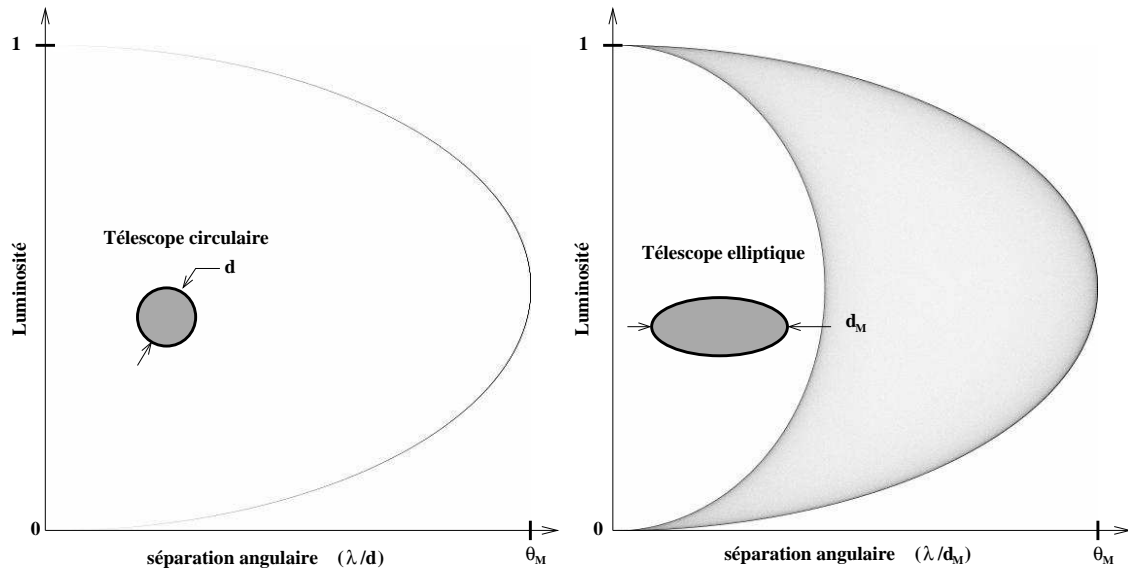


FIG. 5.7 – Densité de probabilité de présence dans le plan séparation angulaire-luminosité. Ici, l'unité de séparation angulaire est fonction du diamètre du télescope et donnée en λ/d . Dans le cas d'une pupille elliptique, un nouveau paramètre : l'orientation du télescope doit être pris en compte. La distribution n'est alors plus répartie sur une simple courbe comme dans le cas circulaire.

L'instrument

Le contraste auquel peut prétendre le PIAAC dépend bien entendu fortement de la résolution angulaire du télescope. Pour un télescope circulaire, l'unité de séparation angulaire passe simplement de milliseconde d'arc à λ/d : son allure reste inchangée. On peut cependant également s'amuser à envisager des configurations optiques plus exotiques. Ainsi, dans le souci d'envoyer en orbite un télescope avec un miroir monolithique le plus grand possible (les plus grands télescopes monolithiques construits à ce jour ont approximativement un diamètre de huit mètres) tout en restant compatible avec le diamètre des coiffes de fusées actuelles (un peu moins de quatre mètres), on peut imaginer envoyer un miroir elliptique qui serait rentré en travers !

Dans un tel cas de figure, la résolution angulaire devient fonction de l'orientation du télescope et la densité de probabilité de présence est modifiée. Une comparaison entre un miroir circulaire et elliptique est donnée à la figure 5.7. Le reste de la discussion se limitera cependant au cas "raisonnable" d'un miroir circulaire de quatre mètres de diamètre.

Un autre paramètre instrumental important est l'erreur de pointage du télescope, qu'on appelle parfois *jitter*. L'hypothèse retenue à la NASA pour TPF est de garantir un pointage meilleur que la milliseconde d'arc. La statistique du jitter généralement considérée comme gaussienne est ici choisie est un peu plus pessimiste car uniformément distribuée sur un disque de rayon une milliseconde d'arc.

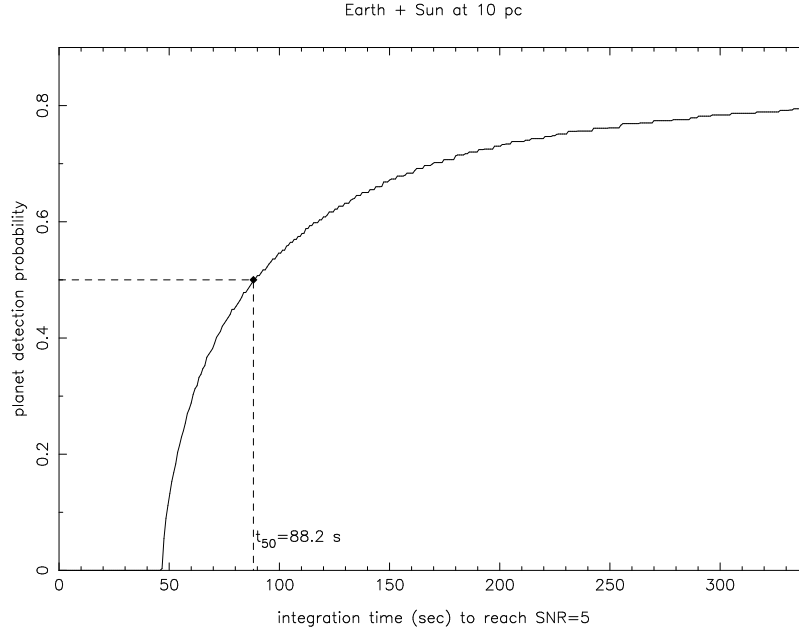


FIG. 5.8 – Courbe d'évolution de la probabilité de détection (avec un rapport signal sur bruit de 5) d'une Terre orbitant autour d'un Soleil située à 10 parsecs. La bande spectrale est $\Delta\lambda = 0.2 \mu m$ centrée sur $\lambda = 0.5 \mu m$. Le diamètre du masque occulteur utilisé est de $1.45 \lambda/d$. La simulation inclut l'effet de résolution partielle de l'étoile modélisée par un disque uniforme de diamètre $1 mas$.

5.6.3 Probabilité de détection

Il nous faut maintenant définir ce qu'on entend par détection. Le résultat final attendu est une image par un capteur de type CCD qu'on supposera parfait : le but de notre évaluation est surtout de s'assurer de la qualité de l'extinction de l'étoile centrale par le masque occulteur du PIAA, ce qui consitue l'obstacle majeur à la détection d'une planète.

La seule perturbation considérée ici est donc le résidu stellaire noté $I_S(x, y)$, le signal planète étant noté $I_C(x, y)$. Le rapport signal sur bruit optimal d'une telle image s'obtient par le calcul de la somme quadratique des rapports signal sur bruit individuels des pixels de l'image (*c.f.* annexe) :

$$RSB = \sqrt{\iint \left(\frac{I_C(x, y)}{\sqrt{I_C(x, y) + I_S(x, y)}} \right)^2 dx dy}. \quad (5.11)$$

On parle de détection lorsque le rapport signal sur bruit donné par cette formule vérifie :

$$RSB \geq 5. \quad (5.12)$$

Le dernier paramètre à discuter est la taille du masque occulteur placé au premier foyer du PIAAC qui est décrit au chapitre 3. La notion délicate d'échelle focale intervient notamment

lorsqu'on exprime le diamètre du masque occulteur en unités de λ/d : il s'agit ici bien de la taille "sur le ciel".

On calcule le rapport signal sur bruit d'une pose élémentaire d'une seconde dans chacune des configurations le long de la courbe de densité de probabilité de présence. On déduit alors le temps de pose nécessaire pour obtenir une détection telle qu'elle a été définie précédemment. On peut alors construire la courbe d'évolution de la probabilité de détection en fonction du temps d'observation, dont un exemple est donné à la figure 5.8. Cette courbe présente un certain nombre de caractéristiques :

- elle présente l'allure (du moins grossièrement) d'une loi en racine carrée qu'on peut attendre dans la mesure où le rapport signal sur bruit croît comme racine carrée du temps de pose.
- la courbe ne "décolle" qu'au bout d'un temps de pose t_0 en deça duquel, aucune configuration dans le plan séparation angulaire-luminosité n'est détectable.
- la probabilité tend asymptotiquement vers une probabilité maximale p_{max} inférieure à 100 %. La valeur de cette asymptote est fortement dépendante de la fraction du ciel masquée par le masque occulteur utilisé.
- le critère simple de comparaison entre plusieurs concepts que l'on retiendra est le temps d'intégration t_{50} pour lequel la probabilité de détection atteint 50 %.

L'utilisation d'une telle courbe de probabilité de détection est instructive à plus d'un titre et paraît être l'outil idéal de comparaison et de sélection de concepts pour l'imagerie des exoplanètes :

- elle permet d'exclure les concepts pour lesquels t_{50} est infini ou si grand qu'il peut être considéré comme infini : il paraît en effet normal de préférer une solution pour laquelle un temps de pose fini donne au moins 50 % de probabilité de détection !
- la valeur de t_{50} donne une idée du temps de pose "conseillé" pour la détection d'une exo-Terre dans chacun des systèmes observés.
- les valeurs de p_{max} et t_{50} permettent de classer différents concepts entre eux. La figure 5.9 présente à cet effet une comparaison entre le PIAAC et une apodisation d'allure similaire (toutefois optimisée) réalisée de façon classique.
- elle permet également d'estimer le temps d'exposition à ne pas dépasser inutilement. Ainsi par exemple, si d'après le modèle, après un temps de pose pour lequel la probabilité de détection est supérieure à une probabilité seuil p_s , la pose ne donne rien, il vaut mieux passer à une autre cible et retenter le coup quelques mois plus tard, laissant à l'éventuelle planète de se trouver dans une configuration plus favorable.

Ce dernier point ouvre sur un aspect particulièrement complexe d'une mission comme TPF qui est la bonne planification des observations : il paraît en effet essentiel que de garantir une utilisation optimale du temps de vie d'un satellite.

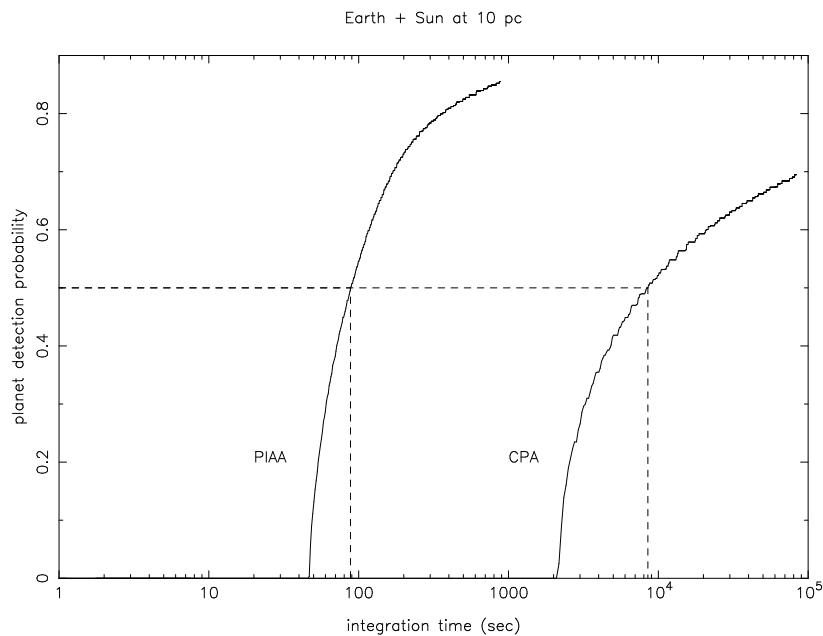


FIG. 5.9 – Courbes de probabilité de détection : comparaison entre l’apodisation PIAAC et une apodisation classique. Pour le PIAAC, $t_{50} = 88\text{ s}$ alors que pour l’apodisation classique, $t_{50} = 2\text{ h }20\text{ min}$.

5.7 Article performances du PIAAC (soumis à ApJ)

Cet article présente de façon plus générale l’intérêt d’un PIAAC pour la mission TPF. En plus des considérations sur le rapport signal sur bruit, il quantifie l’efficacité de l’extinction et montre que dans des conditions d’observation réalistes avec le PIAAC (incluant notamment l’effet “dévastateur” de résolution partielle de l’étoile et du jitter), que c’est le bruit de photon de la planète elle même qui limite la qualité de la détection.

Exoplanet Imaging with a Phase Induced Amplitude Apodization Coronagraph II - Performance

Frantz Martinache¹, Olivier Guyon, Eugene A. Pluzhnik, Raphael Galicher²
Subaru Telescope, National Astronomical Observatory of Japan,
650 North A'ohoku Place, Hilo, HI 96720, USA
 frantz@naoj.org

Stephen T. Ridgway
National Optical Astronomy Observatories, Tucson, AZ 85719
 ridgway@noao.edu

ABSTRACT

The Phase-Induced Amplitude Apodization Coronagraph (PIAAC) uses a lossless achromatic apodization of the telescope pupil to produce a coronagraphic image without compromising the throughput and angular resolution of the telescope. Whereas the principle of the PIAAC concept was discussed in a previous paper, the purpose of this work is to provide an exhaustive overview of the expected performances of a PIAAC on a 4 m-diameter telescope in space. Results presented here are based on realistic simulations of extrasolar terrestrial planets (ETPs) orbiting F, G, K, M stars within 30 pc of the solar system and take into account the probability distributions of planet phase and angular separation. We show that a quasi-complete detection survey of 100 stars would require about 3 days of “open shutter” observing time in the ideal system considered in this work. A classical apodizer would require exposure times about 100 times longer than the PIAAC on a Sun-Earth system at 10 pc. Small pointing errors and non-monochromatic observing require slight oversizing of the focal plane mask with little impact on the system performance.

Subject headings: Techniques: High Angular Resolution, Telescopes, Stars: planetary systems

1. Introduction

The relatively recent discovery of the first extrasolar planets has sparked great scientific interest in searches and characterization of planets. The long term goal of this effort is the characterization of planets similar to ours, referred to as “habitable planets”, or extrasolar terrestrial planets (ETPs).

The requirements of a space mission dedicated to ETP imaging and characterization are very challenging: the optical design has to be able to cancel starlight up to a 10^{10} factor and provide a good high angular resolution PSF within about

1'' of the central source. The uncertain characteristics of planetary systems (multiple-planet system and/or existence of a thick exozodiacal cloud) may make the interpretation of images peculiarly hazardous, especially if angular resolution is poor.

In our first paper, ((Guyon et al. 2005), hereafter Paper I) we presented the Phase Induced Amplitude Apodization Coronagraph (PIAAC), a coronagraphic concept taking advantage of a continuous remapping of the pupil as proposed by Guyon (2003). The PIAAC exhibits all advantages of classical amplitude apodization techniques (CPA): robustness and low sensitivity to stellar angular size and small pointing errors but with full throughput and no loss of angular resolution.

¹Equipe LISE, Observatoire de Haute Provence, 04870 Saint Michel l'Observatoire, France

²Ecole Normale Supérieure, France

This high performance is enabled by the use of two aspheric mirrors which continuously remap the pupil without introducing aberrations for an on-axis source. The remapping is simply a redistribution of the light from the edges of the pupil towards its center to produce an apodized pupil, suitable for removing the light of the star with an occulting mask in a “pseudo-image” plane.

This remapping however violates the “golden-rule” (Traub 1986) which applies to imaging for interferometers and conventional telescopes: the traditional convolution-relationship between object and image does not exist anymore. Images of off-axis sources are rapidly degraded and the definition of a linear focal scale becomes impossible.

To recover the capability of “wide field” imaging, an exact duplicate of the pupil remapping optics has to be used to remap the output pupil into an homothetic copy of the entrance pupil. The intermediate high contrast but narrow field focal plane between the remapping systems is used to selectively remove the central star light with an opaque focal plane mask. The full two remappings system introduce no wavefront distortion, light loss or angular resolution loss for off-axis sources. In this now real image plane, where the traditional concept of focal scale makes sense, the inner working angle (*IWA*) can be made smaller than $1.5\lambda/d$, depending on the diameter of the occulting mask, thus very close to Rayleigh’s fundamental limit. Moreover, being based on geometric optics, it is achromatic according to standard geometric and Fourier optics, though it is, as any optical system, prone to Fresnel propagation chromatic effects.

In this paper, we give an overview of the PIAAC performance for direct imaging of ETPs. We have chosen to adopt a 4 m PIAAC-equipped visible space telescope for all numerical computations performed in this work. This telescope choice is also representative of current plans for the TPF-C mission.

In §2, we propose a metric for performance evaluation of the system. Results are shown in §3 using simulation of the PIAAC, and we study the sensitivity to pointing errors, occulting mask diameter and to photon noise. Finally, a comparison of performance with other coronagraphic approaches is given in §4, and we show how the results obtained in this paper can be used to derive

the total exposure time required for a survey of ETPs.

2. Coronagraph performance metric

To illustrate the performance of a coronagraphic system, authors usually choose to adopt a given angular separation and contrast for a planet-star system, which allows computation of Signal to Noise Ratio (SNR).

This deterministic description allows an easy comparison of different coronagraphic devices performances for a precise template (for example, Earth-Sun system, seen edge on, at 10pc). It is however inadequate to evaluate the detection probability of an ETP orbiting around a given Sun-like star: to be able to predict the evolution of that probability as a function of exposure time, a probabilistic description of the system star-planet is required. In this work we adopt $SNR = 5$ as the detection limit.

To achieve this goal, we propose to use a simple star-planet model characterized by the effective temperature and diameter of the star and the distance to the system. Habitable zone radius, apparent luminosities, contrast, angular separation at maximum elongation and stellar angular diameter are then derived for each system. The star/planet contrast is also a function of planet characteristics: its radius and the composition of its atmosphere will change the planet albedo and may also extend the inner edge of habitable zone inwards. Such considerations are however out of the scope of this paper: using a Lambertian diffusion model for the planet, the contrast C_{FP} for “full planet” phase is given by:

$$C_{FP} = \frac{2}{a} \left(\frac{D}{R} \right)^2, \quad (1)$$

where D is the orbital radius and R_p the planet radius. An Earth like planet ($D = 1 AU$, $R_p = 6400 km$ & $a = 0.37$) leads to $C_{FP} = 3 \times 10^9$.

2.1. List of stellar candidates

The list of targets used in this work was compiled for the purpose of performance evaluation for the TPF mission (Ebbets et al. 2003). It was produced by selecting stars with B-V index ≥ 0.0 (bluer stars have short lifetime and high UV flux,

thus making them unlikely targets for detection of “habitable” planets) within 30pc in the Hipparcos catalog. Stars that are far from the Zero-Age Main Sequence (ZAMS), variable (by more than 0.1 magn.) or binary (with separation less than $10''$) were excluded. For each star, the inner habitable zone was assumed to be 0.7 times the distance at which the stellar irradiance matches the solar irradiance at 1 AU. The final list of 250 stars was obtained by selecting the targets with the largest angular inner habitable zone within spectral class “bins” ranging from A0 to M4.

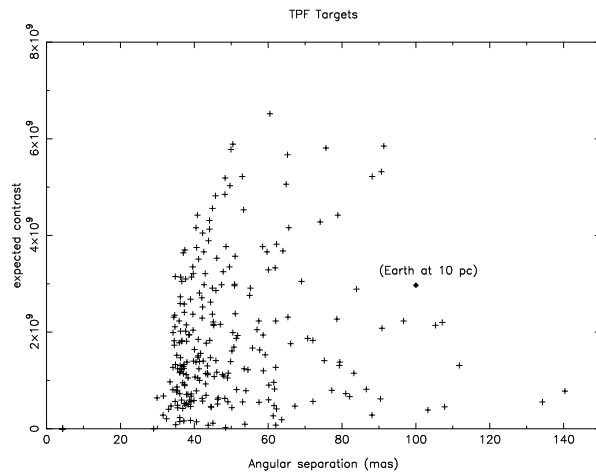


Fig. 1.— Expected contrast and angular separation (at maximum angular separation) of Earth-type planets for the sample of stars used in this work. For each target, it is assumed that a Earth-size planet lies at the inner edge of the star’s habitable zone.

Figure 1 shows the distribution of contrast and angular separation of potential Earth-type planets for this list.

2.2. Planetary system model

The originality of our description lies in the consideration of all orbital configurations which involve angular separation and star/planet contrast, due to planet phase. Depending on the inclination of the orbit and the azimuth of the planet along it, the luminosity contrast and angular separation between the planet and its parent star can drastically evolve, due to changes of the apparent illumination.

We have included this effect in our computations under the form of a probability density function of both angular separation and luminosity, sketched in fig. 3, valid for a circular orbit, which has been computed as follows.

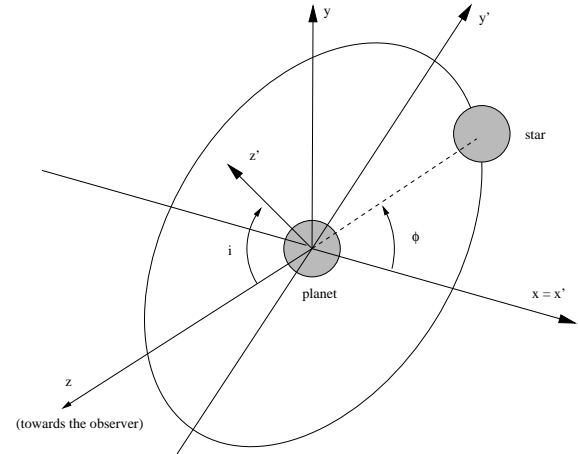


Fig. 2.— Reference system used for the model, which is centered on the planet. i is the inclination of the system ($i = 0$ for a face-on system) and Φ the azimuth of the planet along its orbit.

In the coordinate system adopted (see fig. 2), the probability density function of the planet azimuth is uniform along the orbit whereas the system inclination probability density function is proportional to $\sin i$, from 0 to $\pi/2$ to account for the possible rotation of the coordinate system around the z -axis.

Once the value of both parameters is chosen, we calculate the normalized angular separation α/α_{max} :

$$\alpha/\alpha_{max} = \sqrt{\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \cos^2 i}. \quad (2)$$

The corresponding phase angle, *i.e.* the angle between z and the star-planet axis is then given by:

$$\gamma = \arcsin(\alpha/\alpha_{max}) \text{ for } 0 < \phi < \pi, \quad (3)$$

$$= \pi - \arcsin(\alpha/\alpha_{max}) \text{ for } \pi < \phi < 2\pi. \quad (4)$$

The planet is modeled by a perfect (Lambertian) diffuser. The associated overall planet reflectivity is thus given by:

$$r(\gamma) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos(\gamma) \right), \quad (5)$$

which takes values from 0 (for “new planet” phase) to 1 (for “full planet” phase) and exhibits a peculiar value $r(\pi/2) = 1/2$.

We have thus built the density probability function $f(\alpha, I)$ of angular separation and luminosity for a canonical system. This function is given in fig. 3.

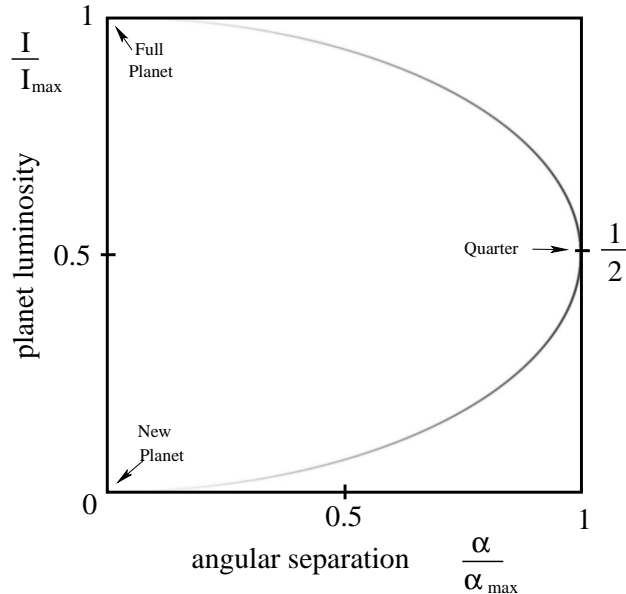


Fig. 3.— Probability density function in the angular separation - luminosity plane. The most probable configurations are around maximal angular separation. In that precise location, the luminosity is exactly a half of the full phase.

To account for finite stellar angular diameter, the star is modeled by a weighted sum of concentric rings. No limb-darkening was introduced in this sum (the star is a disk of uniform surface brightness), which is a slightly pessimistic hypothesis.

The planet is simulated by a non resolved source of luminosity and angular separation chosen according to the probability density function given in fig. 3.

2.3. SNR calculation

We consider that a planet is detected if and only if the SNR is above 5. Given the diameter of the PIAAC occulting mask and the characteris-

tics of the observed system, we compute along the density probability function $f(\alpha, I)$ the integration time required to reach $SNR = 5$, in a $0.2 \mu m$ spectral bandwidth centered on $\lambda = 0.5 \mu m$.

To compute the SNR , only the photon noise is considered. It is given using all the pixels of the detector, by the optimally weighted sum of PSF-subtracted image pixels values as used in Guyon (2003):

$$SNR = \sqrt{\int \left(\frac{I_C(x, y)}{\sqrt{I_C(x, y) + I_S(x, y)}} \right)^2 dx dy.} \quad (6)$$

For different exposure time, we look for the configurations of angular separation and luminosity for which the planet can be detected. We use the density probability function $f(\alpha, I)$ to compute the associated detection probability and can then express it as a function of exposure time.

All the results presented in this paper are for a $4 m$ diameter telescope with no central obstruction. The apodization profile used for the simulation is given in fig. 4.

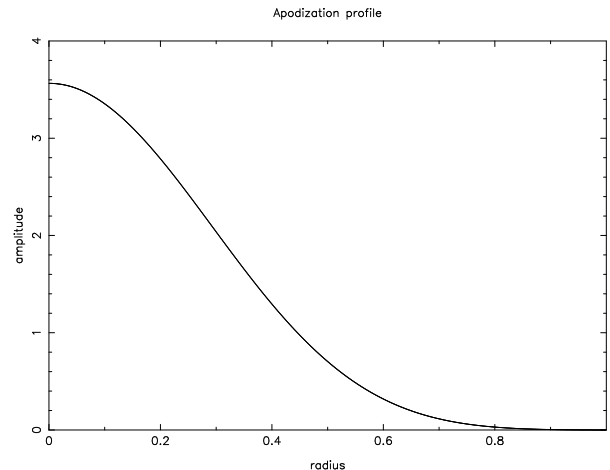


Fig. 4.— Apodization profile used in the PIAAC performance evaluation simulations. The continuous pupil remapping concentrates the light towards the center of the pupil. The amplitude can therefore be greater than unity and in this case, reaches 3.56. Achieving such a profile with classical apodization would result in a 7.9% throughput only.

3. Results

The performance of the PIAAC has been evaluated on the list of 250 potential targets described in §2.1. We have also chosen to provide the results obtained on a fictive case, usually considered by authors as the canonical situation of a Sun-Earth system located at $10 pc$.

All results given in this work are based on the strong following assumption: a planet lies at the inner edge of the habitable zone of each target. We therefore have adopted a pessimistic scenario, as any planet located at higher angular separation will be easier to detect.

3.1. Focal plane mask size

As shown in Paper I, one delicate issue with PIAA is the definition of a focal plane scale. We have already mentioned that, because of the remapping of the pupil, the object-image convolution relationship doesn't exist anymore and the focal plane following the PIAA can only be qualified of "pseudo-image" plane, by analogy with Labeyrie's "pseudo-convolution" relationship in the case of densified pupil for interferometry (Labeyrie 1996).

The PIAAC concept overcomes this difficulty by using an exact copy of the lossless apodizer to restore the pupil after the occulting mask. However, the occulting mask is located in the "pseudo-image" plane: characterizing its size therefore requires some extra attention.

To define the size of the occulting mask, we chose here to use the scale corresponding to an angular distance in the sky, noted $(\lambda/d)_s$ in Paper I. Since we only use this unit, we simply note it λ/d .

3.2. detection probability function

Fig. 5 shows the detection probability for an exo-Earth located at $10 pc$ as a function of integration time. The curve rises from a minimal value t_{min} and follows roughly the shape of a square root function. It exhibits an asymptotic behavior, never reaching 1, as the planet has a finite probability of being both very close to the central star and very faint ("new" planet phase). The ratio between the focal plane mask size and the angular radius of the inner habitable zone has an important effect on asymptotic behavior.

We have computed detection probability as a function of integration time for each target within the list and tested the performances of the PIAAC concept for several focal plane mask sizes. We have chosen to characterize the planet detection probability functions by the time t_{50} for which we have a 50% detection probability of the planet with $SNR = 5$. In the "Sun-Earth" like system, for a $r_{occ} = 1.45 \lambda/d$ -radius mask, $t_{50} = 88 s$.

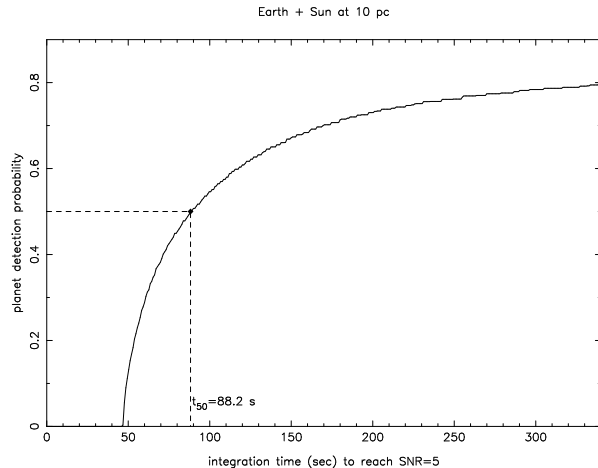


Fig. 5.— Evolution of the planet detection probability (with a signal to noise ratio $SNR = 5$) as a function of exposure time for an Earth-Sun system at $10 pc$ ($m_V = 5$, $1 mas$ angular diameter, $100 mas$ maximum angular separation). The bandwidth is $\Delta\lambda = 0.2 \mu m$ and the central wavelength is $\lambda = 0.5 \mu m$.

3.3. Focal plane mask size optimization

In the absence of pointing errors, optimizing the size of the occulting focal plane mask is simply a matter of choosing the best trade-off between:

- providing a sufficient nulling by increasing the size of the mask, notably to take into account the stellar angular diameter: this usually improves the SNR and minimizes the necessary exposure time for detection at maximum angular separation.
- covering a large fraction of the search area on the sky by decreasing the size of the mask: this maximizes the number of detectable orbital configurations and therefore increases the detection probability.

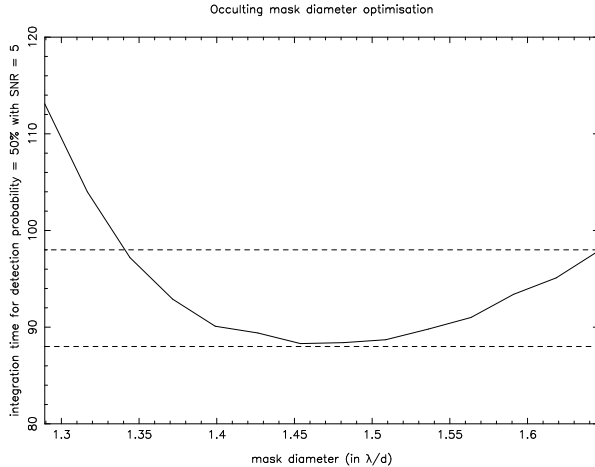


Fig. 6.— Top: Integration time for a 50% detection probability as a function of occulting mask radius ($t_{50} = f(r_{occ})$). It shows the existence of an optimal value $r_{occ} = 1.45 \lambda/d$ in the case of an exo-Earth at $10 pc$ ($m_V = 5$, $1 mas$ stellar angular diameter, $100 mas$ angular separation). The two dashed lines show that t_{50} can be maintained under $100 s$ with a $0.3 \lambda/d$ tolerance on the mask size.

Fig. 6 highlights the existence of such an optimum mask size for which t_{50} is minimum. For smaller masks, the coronagraphic leaks dominate the performances whereas for bigger masks, the occultation of too much sky by the mask limits the detection probability.

The optimum of $t_{50} = f(r_{occ})$ is however not narrow: figure 6 shows that within almost $0.3 \lambda/d$, t_{50} remains within 10% of its optimal value: the choice of an exact mask radius is therefore not critical. Figure 7 shows that the optimal mask size is a function of stellar type: since the inner habitable zone is larger on bluer stars, a slightly larger mask size performs better.

3.4. Achromaticity of the PIAAC

Figure 6 can also be interpreted as an indication of polychromatic PIAAC performance. As explained in paper I, the PIAA technique, being based on geometrical optics, produces an achromatic apodization. However, as other coronagraphs, it remains *a priori* sensitive to the size chromatism of the star image. Keeping in mind that changing the wavelength is strictly equiva-

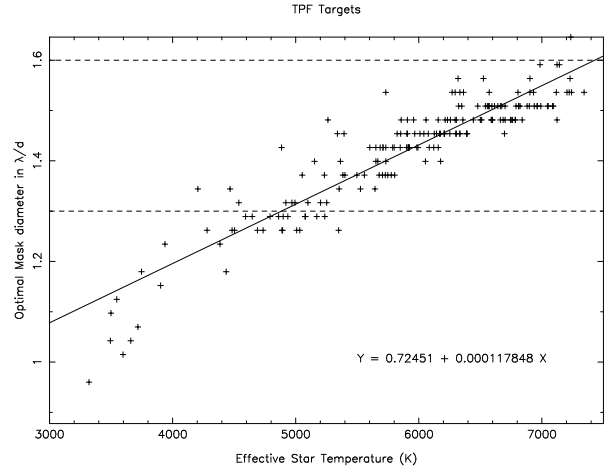


Fig. 7.— Correlation between the optimal mask diameter and the effective star temperature for the targets chosen for TPF. If the $r_{occ} = 1.45 \lambda/d$ mask is used, dashed lines show that most of the targets are contained within this $0.3 \lambda/d$ tolerance.

alent to changing the mask radius, another glance at fig. 6, now tells us that a single occulting mask size can work with relatively stable performance over a 30% bandwidth.

3.5. A tunable occulting mask ?

We now quantify how advantageous would be the ability to tune the occulting mask radius for each target. We have selected for each target the mask size which minimizes t_{50} , and have added all values of t_{50} to derive the total exposure time required to reach a 50% detection probability for all targets.

Table 1 lists the simulated total exposure times required to achieve, for different number of targets, a 50% detection probability with a $SNR = 5$. Because of the increasing dispersion of system parameters (especially stellar angular diameter), the relative gain increases with the number of targets. It however remains of modest: around 10% for most of the catalog. The optimal fixed mask size is $r_{occ} = 1.48 \lambda/d$ for 50 and 100 targets and $r_{occ} = 1.45 \lambda/d$ for the other cases.

The relative flexibility on the choice of the occulting mask radius for each of the targets explains why a tunable mask is not a determinant characteristic of the performance: fig. 6 shows that most

nb. of targets n	tunable mask total exp. time	fixed mask total exp. time	relative gain
50	56 min 46 s	63 min 16 s	10.3 %
100	12 h 5 min	13 h 20 min	9.3 %
150	2 day 2 h	2 day 7 h	9.0 %
200	6 day 11 h	7 day 7 h	11.3 %
250	15 day 3 h	17 day 16 h	14.5 %

Table 1: Occulting mask size optimization: total exposure time required to reach a 50% detection probability on all targets of a predefined sample. 5 samples of increasing sizes have been generated from the original sample, by selecting the n systems with the largest angular inner habitable zone. The exposure times required with a tunable mask size, optimized for each target, and a fixed mask size are compared.

of the targets are contained within the 1.3–1.6 λ/d horizontal band.

The use of a tunable mask therefore appears to be a non necessary complication onboard a space telescope. However, a convenient solution for a mask with variable geometry could be the Hg-mask coronagraph (Bourget et al. 2001) made of a drop of mercury sandwiched between two plates of glass.

3.6. Pointing errors

To evaluate the influence of pointing errors on the PIAAC performances, we have chosen a tip-tilt error function uniformly distributed in a disk of radius 1 mas which is representative of the expected pointing performance of future coronagraphic space telescope.

Figure 8 shows on the same graph the evolution of required integration time t_{50} both with and without pointing error for the canonic case Earth + Sun at 10 pc. The PIAAC performance is of course seriously affected by pointing error when a small mask is used, because of the increased coronagraphic leaks. However, a 5% increase of the occulting mask radius is sufficient to find the optimal working conditions and 10% increase is sufficient to see no significant difference between the 2 scenarios.

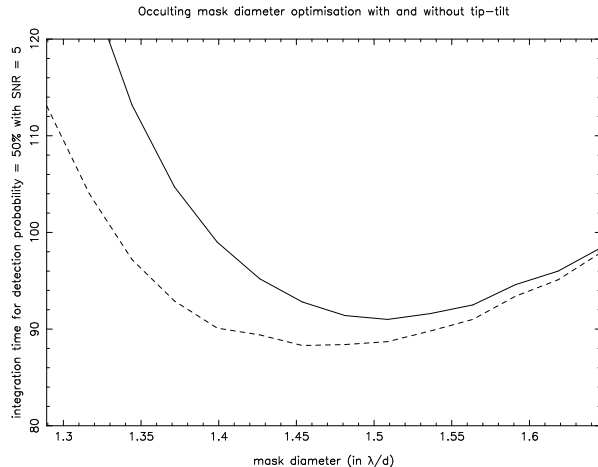


Fig. 8.— Effect of pointing errors on the mask size optimization. Dashed curve: 1 mas radius pointing error. Solid curve: no pointing error. A small increase of the mask diameter is sufficient to accommodate a 1 mas pointing error, with little loss of performance (4 m telescope, $\lambda/d = 26 mas$).

In the same conditions as table 1, table 2 gives total exposure time including the 1 mas pointing error.

nb. of targets n	tunable mask total exp. time	fixed mask total exp. time	relative gain
50	66 min	72 min	8.9 %
100	17 h 43 min	18 h 44 min	5.7 %
150	3 d 14 h	3 d 18 h	4.9 %
200	12 d 22 h	13 d 12 h	4.4 %
250	35 d 5 h	36 d 14 h	4.0 %

Table 2: Total exposure time for tunable and fixed occulting masks including 1 mas-radius pointing error.

Unlike the “no pointing error scenario”, the relative gain offered by a tunable mask decreases when the number of target increases. When increasing the number of targets, the tip-tilt effect statistically dominates the angular diameter of the star, as more distant systems (for which the stellar angular diameter is small, and the inner habitable zone is close to the star) are included in the sample.

The best mask is in all cases $r_{occ} = 1.51 \lambda/d$. This increase of the mask radius is consistent with the pointing error amplitude, which represents 4% of the diffraction limit λ/d on a 4 m telescope.

3.7. Photon noise

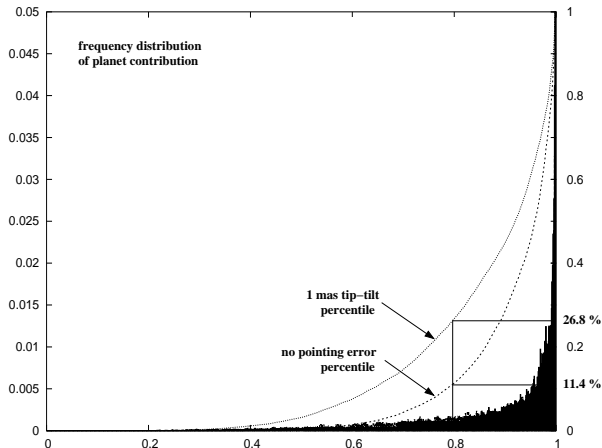


Fig. 9.— Frequency distribution of the contribution of planet light for all detectable configurations at $t = t_{50}$ and for all 250 potential targets. The distribution exhibits a high and narrow peak very close to 100% and with no major occurrences under 60%, which shows that the planet photon noise is the major source of noise. Overimposed are the associated percentiles confirming this assumption. In the absence of pointing errors, 88.6% (73.2% with 1 mas pointing error) of the detections are performed with a planet contribution to the total measured flux higher than 80%.

Our only criteria for successful detection of a planet was the $SNR \geq 5$, as derived from equation 6. This criteria seems reasonable unless if the planet light is superimposed on a much brighter star light residual in the focal plane. Such a configuration would require an efficient calibration of the residual star light, so that it can be subtracted with high precision. Small changes in the coronagraphic PSF of the instrument would compromise this subtraction.

In this section, we therefore evaluate the relative contribution of planetary photons to the total number of photons (planet + star) on the focal plane domain used for the planet detection. Fol-

lowing the conclusions of sec. 3.5, we chose to evaluate this contribution for a unique occulting mask size $r_{occ} = 1.45 \lambda/d$ with no pointing error and then $r_{occ} = 1.51 \lambda/d$ in the case of a 1 mas tip-tilt error. The focal plane domain used for this measurement only includes pixels for which the surface brightness of the planet image is within 50% of its peak. For each system, we compute the relative contribution of planetary photons for all points of the separation/luminosity plane (see fig. 3) for which the planet would be detected within the exposure time $t = t_{50}$. Figure 9 shows the result obtained over the whole target catalog: around 80% of the planet detections are performed with a signal (the planet light) which is more than 80% of the total recorded light (planet + star).

This result insures a relative insensitivity to calibration error: the nulling of the coronagraph is good enough so that photon noise of the planet itself limits the quality of the detection. This result is in good agreement with a similar result obtained in Paper I (see figure 16).

4. Discussion

4.1. PIAAC and other coronagraphs

In this section, we attempt to compare the performance of the PIAAC with other coronagraphs to highlight its strong points. Comparison with classical pupil apodization (CPA) is easier than with other coronagraphs because of the similarities in the 2 approaches. We were therefore able to quantify this theoretical performance difference in a well-defined example in §4.1.1. How the PIAAC compares to other coronagraphs is discussed more qualitatively in §4.1.2.

4.1.1. Comparison between PIAAC and CPA

The optimization of an apodized pupil obtained by CPA technique is the result of a trade-off between increasing the contrast and maximizing the apodizer's throughput (Kasdin et al. 2003). To provide the necessary contrast for ETP detection, the typical CPA throughput is around 10% to 20%.

We have compared the performances of a PIAAC with the a CPA using the same apodization, given in fig. 4. We have optimized this profile for CPA by widening it to get the optimal computed

value of t_{50} . The CPA profile resulting from this optimization is widened by 4%: the throughput then rises from 7.89% to 9.23% and the corresponding gain on the value of t_{50} is about 20%.

Figure 10 shows the planet detection probability function of time for PIAAC and optimized CPA. Because of its lower throughput and larger IWA, the CPA requires about 100 times the exposure time needed for the PIAAC to reach a 50% detection probability. The difference in exposure time is smaller if the required detection probability is low, in which case the planet can be observed outside the IWA of both the CPA and PIAAC, at about $4\lambda/d$ (maximum elongation). In this case, the exposure time ratio is about 40, and is explained by the difference in throughput (factor 10), the fact that the 2 PSFs overlap in the CPA (factor 2) and the largest size of the PSF obtained by the CPA (which means more “coronagraphic leak” is mixed with the planet). As the required detection probability increases, the CPA exposure time grows more rapidly because the planet needs to be detected at a smaller angular separation (within the CPA’s IWA, but still outside the PIAAC’s IWA).

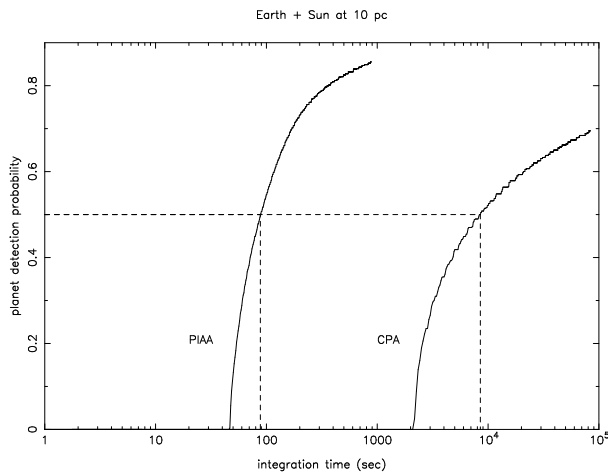


Fig. 10.— Planet detection probability comparison between PIAAC and CPA for a “Sun-Earth” like system at 10 pc. For PIAAC: $t_{50} = 88$ s and for CPA: $t_{50} = 2$ h 20 min.

4.1.2. Comparison with other coronagraphs

Several coronagraph design offer an IWA smaller or equal to the PIAAC’s IWA:

- Phase mask coronagraphs (Roddier 1997; Rouan et al. 2000) can offer total extinction of an on-axis source and nearly 100% throughput with an IWA of about $1\lambda/d$.
- The Achromatic Interferometric Coronagraph, AIC (Baudoz et al. 2000) has an IWA even smaller than $1\lambda/d$.

These coronagraphs unfortunately suffer from a poor sensitivity to pointing errors and, with the exception of the AIC, chromaticity.

The sensitivity to pointing is especially problematic, since at the contrast level required for direct detection of ETPs, the angular size of the parent star would be sufficient to prevent detection of the planet. The only solution to this problem is usually to reduce the telescope size.

Chromaticity is a less fundamental problem, since it can be mitigated by modification of the coronagraph design (see for example Soummer et al. (2003)), use of chromatic components designed to compensate for the coronagraph’s chromaticity (Wynne 1979), or “spectral multiplexing” of the coronagraph.

On the other hand, the CPA has excellent sensitivity to pointing errors but low throughput and large IWA. Better throughput (about 50%) and slightly smaller IWA (about $2.5\lambda/d$) can be reached with an eighth-order band-limited mask Lyot coronagraph (Kuchner et al. 2005) designed to have good sensitivity to pointing errors.

The PIAAC’s uniqueness is to combine small IWA and full throughput with good sensitivity to pointing errors. These desirable characteristics can be found separately in other coronagraph designs, but are usually not combined in a single coronagraph.

4.2. Detection survey of ETPs with a PIAAC

In practice, a detection survey of ETPs would require more than 50% detection probability per target. Rather than increasing the exposure time of a single observation, multiple observations of a single star at different epochs would simultaneously increase the detection probability and allow derivation of orbital parameters. A possible strategy is to observe 6 times the same target with an exposure time corresponding to a 50% detection

probability per observation. This would lead to a $\approx 98\%$ probability of detecting the planet in at least 1 of the 6 images, and 89% probability of having at least 2 detections among the 6 images (all probabilities are given assuming no correlation between detection probabilities in individual observations, which is not strictly true). For this observation strategy, the confidence level in the detection (or non-detection) of ETPs is very high, especially given than the above numbers assume that the ETP is at the inner edge of the habitable zone, and the survey can be qualified as “quasi-complete”. The exposure times given in table 1 should be multiplied by 6 to compute the total exposure time required: 3 days for a survey of 100 stars (with a tunable mask) and 39 days for 200 stars.

5. Conclusion

We have shown in this work the very high theoretical performance of the PIAAC. Thanks to the unique combination of full throughput, small IWA, good sensitivity to pointing errors and good achromaticity, a complete ETP detection survey of 100 stars would theoretically require only 3 days of total exposure with a perfect PIAAC system on a 4m space telescope. This number exceeds the requirements for the TPF mission by a large margin.

Although the PIAAC is in principle quite robust (good achromaticity, good sensitivity to pointing errors, concept entirely based on reflective optics), many effects could in practice prevent such high performance, such as:

- **(1) Chromaticity due to Fresnel propagation.** This effect appears when several optical elements of finite sizes and/or with non-ideal surfaces are placed in non-pupil planes. It can be compensated for by wavefront control, but would limit the spectral bandwidth within which the appropriate contrast level could be maintained by using only one deformable mirror.
- **(2) Inability to reach the contrast level because of poor wavefront control.**
- **(3) Strong background due to exozodiacal light.**
- **(4) Complex planetary systems with**

multiple planets. This would require more numerous observations to derive with confidence the orbital parameters.

The likely occurrence of these limiting effects favors the use of a high performance coronagraph: high throughput is useful to optimize the performance of a wavefront control system and allows use of smaller spectral bandwidths (to mitigate issue (1)) and good angular resolution mitigates issues (3) and (4). As the overall performance of a planet-imaging telescope is function of many factors, the use of a PIAAC coronagraph can relax requirements in other subsystems.

This work was carried out under JPL contract numbers 1254445 and 1257767 for Development of Technologies for the Terrestrial Planet Finder Mission, with the support and hospitality of the National Astronomical Observatory of Japan.

REFERENCES

- Baudoz, P., Rabbia, Y., Gay, J. 2000, A&AS, 141, 319
- Bourget, P., Veiga, C. H., & Vieira Martins, R. 2001, PASP, 113, 436
- Ebbets, D.C., Kilston, S., Linfield, R.P. 2003, Proc. SPIE, 4860, 120
- Guyon O. 2003, A&A, 404, 379
- Guyon, O., Pluzhnik, E.A., Galicher, R., Martinache, F., Ridgway, S.T., & Woodruff, R.A. 2005, ApJ, 622, 744
- Kasdin, N.J., Vanderbei, R.J., Spergel, D.N., Littman, M.G. 2003, ApJ, 582, 1147
- Kuchner, J.K., Crepp, J., Ge, J. 2005, astro-ph/0411077
- Labeyrie, A. 1996, A&AS, 118, 517
- Roddier, F., Roddier, C. 1997, PASP, 109, 815
- Rouan, D., Riaud, P., Boccaletti, A., Clnet, Y., Labeyrie, A. 2000, PASP, 112, 1479
- Soummer, R., Dohlen, K., Aime, C. 2003, A&A, 403, 369
- Traub, W. A. 1986, *Appl. Opt.*, 25, 528

Wynne, C.G. 1979, Opt. Comm., 28, 21

Conclusion

L'imagerie des exoplanètes est un formidable challenge technique qui mobilise beaucoup d'ingéniosité dans le domaine de la recherche en haute résolution angulaire. Depuis la mise en évidence de l'existence de des planètes il y a 10 ans, on rêve de pouvoir contempler des images de ces nouveaux mondes. Dans ce contexte de la recherche du meilleur exoplanétographe, la technique de reconfiguration de la pupille apparaît comme particulièrement prometteuse.

En réorganisant de façon géométrique la répartition de lumière dans une pupille, on produit, sans perdre un seul photon, des effets adaptés à différentes situations. Dans le domaine de l'interférométrie, la reconfiguration de la pupille se décline sous le nom d'hypertélescope [Labeyrie 1996]. Densifier la pupille d'un interféromètre le transforme en un véritable système imageur qui fait une utilisation optimale des photons et avec lequel la coronographie est alors possible.

Pour permettre l'utilisation d'un interféromètre dans ces conditions, un soin essentiel doit toutefois être apporté au cophasage des télescopes (en particulier pour la coronographie). La méthode des speckles dispersés [Martinache 2004a] que je décris dans cette thèse est une tentative de réponse à ce besoin. Elle permet une mise en phase globale de la pupille, même lorsque celle-ci est redondante et utilise toute l'information accessible à l'interféromètre.

Dans le domaine des télescopes classiques, la reconfiguration continue PIAA proposée par [Guyon 2003] permet d'apodiser la pupille, sans perdre de lumière. Une forte apodisation, contrairement à tous les concepts dérivés du coronographe de Lyot [Lyot 1930], est infiniment moins sensible à l'effet de résolution partielle de la source à coronographier. L'apodisation PIZZA pour la coronographie [Martinache 2004c] présenté dans cette thèse n'échappe malheureusement pas à cette limitation sévère, dépassée par l'apodisation.

Aussi, à l'heure actuelle, le PIAAC me paraît rassembler toutes les qualités nécessaires pour permettre l'imagerie d'exoplanètes semblables à la Terre dans un rayon de trente parsecs, avec un télescope au poli de grande qualité certes, mais de dimension raisonnable. Ici encore, le contrôle du front d'onde est un facteur déterminant qui affecte de la même façon tous les systèmes dont la prétention est d'atteindre une dynamique de l'ordre du milliard. Beaucoup de travail reste encore à fournir dans ce domaine avant de mettre sur orbite le télescope qui permettra de voir la première exo-Terre!

Combinaison de mesures et calcul de rapport signal sur bruit

On dispose d'une série de mesures : pixels dans une image, points d'une courbe de lumière ou autre et pour chacune de ces mesures, d'une évaluation du bruit de cette mesure.

On cherche la meilleure pondération de chaque mesure, *i.e.* la combinaison de mesure qui conduira au meilleur signal sur bruit global.

Soit la série de mesure : $(S_i)_{i=1}^n$. A chaque mesure est donc associé un bruit $(N_i)_{i=1}^n$. On cherche les pondérations $(\alpha_i)_{i=1}^n$ (avec $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$) qui permettent de combiner les signaux en optimisant le rapport signal sur bruit.

$$S = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i. \quad (13)$$

A chacun des termes de cette somme, correspond un bruit N_i auquel on associe la même pondération α_i . Le bruit s'additionnant quadratiquement, le bruit global s'écrit alors :

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i N_i)^2}, \quad (14)$$

et le rapport signal sur bruit s'écrit simplement sous la forme :

$$S/N = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i N_i)^2}}. \quad (15)$$

Optimiser le rapport signal sur bruit, c'est annuler toutes les dérivées partielles par rapport aux $(\alpha_j)_{j=1}^n$, *i.e.* :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (S/N) = 0. \quad (16)$$

Le calcul de cette dérivée (quotient de fonctions) conduit à l'obtention de l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (S/N) = \frac{S_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i N_i)^2}} + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i \right) * \left(-\frac{1}{2} \right) * \frac{2\alpha_j N_j^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i N_i)^2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i N_i)^2} = 0. \quad (17)$$

α_j doit alors vérifier la condition simple suivante :

$$\alpha_j = \frac{S_j}{N_j^2} \times \frac{N^2}{S}. \quad (18)$$

Cette valeur de α_j , une fois réinjectée dans l'expression du rapport signal sur bruit, conduit à l'expression du rapport signal sur bruit optimal :

$$S/N = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{S_i}{N_i} \right)^2}. \quad (19)$$

Autrement dit, le rapport signal sur bruit optimal d'un ensemble de mesure est déterminé par le calcul de la somme quadratique des rapports signal sur bruit individuels.

Bibliographie

- [Abe *et al.* 2001] Abe L. *et al.* 2001, “The achromatic phase knife coronagraph”, *A & A*, **374**, 1161-1168.
- [Abe 2002] Abe L. 2002, “Imagerie à Haute Dynamique : Coronographie à Contraste de Phase et Détecteurs Spécifiques”, *Thèse de l’Université de Nice-Sophia Antipolis*.
- [Aime *et al.* 2001] Aime C. *et al.* 2001, “Interferometric apodization of rectangular apertures”, *A & A*, **379**, 697-707.
- [Aime *et al.* 2002] Aime C., Soummer R. & Ferrari A. 2002, “Total coronagraphic extinction of rectangular apertures using linear prolate apodizations”, *A&A*, **389**, 384.
- [Aime & Soummer 2003a] Aime C. & Soummer, R. 2003, “Introduction to stellar coronagraphy with entrance pupil apodization”, *Astronomy with High Contrast Imaging, EAS Publications Series*, **8**, 79-92.
- [Aime & Soummer 2003b] Aime C. & Soummer, R. 2003, “Redundant versus non-redundant apertures for exoplanet detection”, *Astronomy with High Contrast Imaging, EAS Publications Series*, **8**, 353-359.
- [Arnold *et al.* 2002] Arnold L. *et al.* , 2002, “A test for the search for life on extrasolar planets. Looking for the terrestrial vegetation signature in the Earthshine spectrum”, *A&A*, **392**, 231-237.
- [Baldwin *et al.* 1986] Baldwin J. E., Haniff C. A., Mackay C. D. & Warner P. J. 1986, “Closure phase in high-resolution optical imaging”, *Nature*, **320**, 595-597.
- [Baudoz 1999] Baudoz P., 1999, “Coronographie Stellaire : Le Coronographe Interférentiel Achromatique”, *Thèse de l’Université de Nice-Sophia Antipolis*
- [Bonneau *et al.* 1975] Bonneau D., Josse M. & Labeyrie A., 1975, “Lock-in image subtraction : detectability of circumstellar planets with the large space telescope”, *ASSL : Image processing in astronomy*, **54**, 403-409.
- [Borkowski 2004] Borkowski V., 2002, “Analyse d’onde par la méthode des speckles dispersés”, *Thèse de l’Université de Nice-Sophia Antipolis*.
- [Borkowski *et al.* 2002] Borkowski V., Labeyrie A., Martinache F., 2002, “A wavefront analysis algorithm for multi-aperture interferometers and hypertelescopes”, *Proc. 36th ES-LAB Symp.*, **514**, 273

- [Borkowski *et al.* 2005] Borkowski V., Labeyrie A., Martinache F., Peterson D., 2004, "Sensitivity of the 'dispersed speckles' piston sensor in multi-aperture interferometers and hypertelescopes", *A & A*, **429**, 747-753.
- [Codona & Angel 2004] Codona, J. L. & Angel R., 2004, "Imaging Extrasolar Planets by Stellar Halo Suppression in Separately Corrected Color Bands", *ApJ*, **104**, 117.
- [Le Coroller *et al.* 2005] Le Coroller H. *et al.* , 2005 "Tests with a Carlina-type hypertelescope prototype. I. Demonstration of star tracking and fringe acquisition with a balloon-suspended focal camera", *A&A*, **426**, 721-728.
- [Cuevas 2002] Cuevas S., 2002, "AO curvature system for segmented primary telescopes", *IAU Technical Workshop*, **266**, 568.
- [Ebbets *et al.* 2003] Ebbets, D. C., Kilston, S., & Linfield, R. P., 2003, "Phenomenology of extrasolar planets in reflected starlight and system level requirements for detection and characterization", *SPIE*, **4860**, 120-129.
- [Fienup 1978] Fienup J. R., 1978, "Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform", *Opt. Lett.*, **3**, 1
- [Galicher *et al.* 2005] Galicher R. *et al.* 2005, "Laboratory Demonstration and Numerical Simulations of the Phase Induced Amplitude Apodization", *PASP*, **117**, 411.
- [Gay & Rabbia 1996] Gay J. & Rabbia Y., 1996, "Principes d'un coronographe interférentiel" *C. R. Acad. Sci. Paris*, **322**, 265-271.
- [Gillet *et al.* 2003] Gillet S. *et al.* , 2003, "Imaging capabilities of hypertelescopes with a pair of micro-lens arrays" *A&A*, **400**, 393-396.
- [Goodman 1985] Goodman J. W., 1985, *Statistical Optics*, *Wiley Classics Library*
- [Goodman 1996] Goodman J. W., 1996, *Introduction to Fourier Optics*, *Mc Graw. Hill International Editions*
- [Guyon & Roddier 2002] Guyon O. & Roddier F. 2002, "A nulling wide field imager for exoplanets detection and general astrophysics", *A&A*, **391**, 379-395.
- [Guyon 2003] Guyon O. 2003, "Phase-induced amplitude apodization of telescope pupils for extrasolar terrestrial planet imaging", *A&A*, **404**, 379.
- [Guyon 2004] Guyon O. 2004, "Coronagraphy VS. Nulling", *EAS Publications Series*, **12**, 263-271.
- [Guyon *et al.* 2005] Guyon O. *et al.* 2005, "Exoplanets imaging with a Phase-Induced Amplitude Apodization Coronagraph - I. Principle", *ApJ*, **622**, 744.
- [Hartmann 1900] Hartmann J., 1900, "Bemerkungen über den Bau und die Justirung von Spektrographen", *Z. Instrumentenk.*, **20**, 47.
- [Henry *et al.* 1999] Henry G., Marcy G., Butler P. & Vogt S., 1999 "A Transiting 51 Peg-like Planet", *ApJ. Letters*, **529**, L41.
- [Jacquinot & Roizen-Dossier 1964] , Jacquinot P. & Roizen-Dossier B., 1964, *Prog. Opt.*, **3**, 29.

- [Koechlin *et al.* 1996] Koechlin L. *et al.* 1996, “Dispersed fringe tracking with the multi- r_0 apertures of the Grand Interféromètre à 2 Télescopes”, *Appl. Opt.*, **35**, 3002
- [Koechlin 2003] Koechlin, L., 2003, “Field-resolution ratio in multi-aperture imaging” *EAS Publications Series*, **8**, 349-352.
- [Kuchner & Spergel 2003] Kuchner M. J. & Spergel D. N., 2003 “Notch-Filter Masks : Practical Image Masks for Planet-finding Coronagraphs”, *ApJ*, **594**, 617.
- [Labeyrie 1970] Labeyrie A. 1970, “Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Image Stars”, *A&A*, **6**, 85-87
- [Labeyrie 1996] Labeyrie A. 1996, “Resolved imaging of extra-solar planets with future 10-100 km optical interferometric arrays”, *A&A Suppl. Ser.*, **118**, 517
- [Labeyrie *et al.* 2002] Labeyrie A., 2002, “Adaptive optics for ground based hypertelescopes”, *ESO Conf. Workshop Proc.*, **58**, 109
- [Labeyrie 2004] Labeyrie A., 2004, “Removal of coronagraphy residues with an adaptive hologram, for imaging exo-earths”, *EAS Publications Series*, **12**, 3-10.
- [Lardièrè *et al.* 2002] Lardièrè O., Labeyrie A., 2002, “Sites and adaptation phasing for 1-10 km hypertelescopes”, *IAU Technical Workshop*, **266**, 608.
- [Lardièrè *et al.* 2005] Lardièrè O., Schneider J. *et al.* , 2005, “VIDA, a direct spectro-imager for the VLTI”, *invited talk at ESO workshop on "The power of optical/IR interferometry : recent scientific results and 2nd generation VLTI instrumentation"*, Garching b. Munchen, Germany, 4-8 April, 2005, **in press**.
- [Lardièrè *et al.* 2005] , “ VIDA concept report”, *Euro-Interferometry Initiative and OPTICON-I3-JRA4-WP1.1 concept study reports*, (<http://eii-jra4.ujf-grenoble.fr/>).
- [Lardièrè & Martinache 2005] Lardièrè O. & Martinache F., 2005, “The Hypertelescope imaging mode, the best beam combination scheme for direct imaging with diluted apertures.”, *en préparation*.
- [Quirrenbach *et al.* 2004] Quirrenbach A. *et al.* , 2004, “Coronagraphic Methods for the Detection of Terrestrial Planets”, *astro-ph*, **0502254**.
- [VIDA 2002] Lardièrè O. *et al.* , 2002, “VIDA (VLTI Imaging with a Densified Array) : a densified pupil combiner proposed for snapshot imaging with the VLTI”, *SPIE*, **4838**, 170.
- [Vitruv 2005] Malbet F. *et al.* , 2005, “Vitruv”, *??, ??, ??*.
- [Lyot 1930] Lyot B., 1930, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **191**, 834.
- [Lyot 1932] Lyot B., 1932, “Etude de la couronne solaire en dehors des éclipses. Avec 16 figures dans le texte.”, *ZA*, **5**, 73
- [Lyot 1939] Lyot B., 1939, “A study of the solar corona and prominences without eclipses” *MNRAS*, **99**, 580-594.
- [Mayor & Queloz 1995] Mayor M. & Queloz D. 1995, “A Jupiter mass companion to a solar-type star”, *Nature*, **378**, 355.

- [Michelson & Pease 1921] Michelson A. & Pease F. G., 1921, "Measurement of the diameter of alpha Orionis with the interferometer", *Astron. J.*, **53**, 249.
- [Martinache 2004a] Martinache F., 2004, "Global wavefront sensing for interferometers and mosaic telescopes : the dispersed speckles principle", *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, **6**, 216-220.
- [Martinache 2004b] Martinache F., 2004, "Phase contrast apodization", *EAS Publication Series*, **12**, 311-316.
- [Martinache 2004c] Martinache F., 2004, "PIZZA : a Phase Induced Zonal Zernike Apodization designed for stellar coronagraphy", *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, **6**, 809-814.
- [Martinache & Schneider 2004] Martinache F. & Schneider J., 2004, "The New Extrasolar Planet Encyclopedia", *SF2A*, **48**.
- [Martinache *et al.* 2005] Martinache F. *et al.* , 2005, "Exoplanets imaging with a Phase-Induced Amplitude Apodization Coronagraph - II. Performance", *ApJ*, **accepté pour publication**.
- [Martinache 2005] Martinache F. 2005, "Pupil densification", *EAS Publications Series*, **en préparation**.
- [Nisenson & Papaliolios 2001] Nisenson P. & Papaliolios C., 2001, "Detection of Earth Like Planets Using Apodized Telescopes", *ApJ*, **548**, L201-L205.
- [Pedretti et Labeyrie 1999] Pedretti E. & Labeyrie A., 1999, "A hierarchical phasing algorithm for multi-element optical interferometers", *A & AS*, **137**, 543-551.
- [Pedretti *et al.* 2000] Pedretti E. *et al.* , 2000, "First images on the sky from a hyper telescope", *A & AS*, **147**, 285-290.
- [Perez 2000] Perez J. P., 2000, "Optique Fondements et applications", 6^{eme} édition Dunod Masson Sciences.
- [Prasad & Kulkarni 1989] Prasad S. & Kulkarni S. R. 1989, "Noise in optical synthesis images. I. Ideal Michelson interferometer", *JOSA*, **6**, 1702-1714.
- [Ragazzoni 1996] Ragazzoni R. J., 1996 "Pyramide", *J. Modern Optics*, **43**, 289.
- [Riaud 2003] Riaud P. 2003 "Coronographie à masque de phase : applications aux télescopes et interféromètres au sol et dans l'espace", *Thèse de l'Université de Paris-Pierre & Marie Curie*.
- [Rouan *et al.* 2000] Rouan D., Riaud P., Boccaletti A., Clénet Y. & Labeyrie A. 2000, "The four-quadrant phase mask coronagraph. I. Principle", *PASP*, **112**, 1479.
- [Roddier F. 1986] Roddier F., 1986, "Triple correlation as a phase closure technique", *Opt. Communications*, **60**, 145-148.
- [Roddier F. 1988] Roddier F., 1988, "Curvature sensing and compensation : a new concept in adaptive optics", *Appl. Opt.*, **27**, 1223-1225.
- [Roddier & Roddier 1997] Roddier F. & Roddier C., 1997, "Stellar coronagraph with the phase mask", *PASP*, **109**, 815-820.

- [Schneider 1995] Schneider J., 1995, "Encyclopédie des planètes extrasolaires", <http://www.obspm.fr/planets>
- [Schneider 1995] Schneider J., 1998, "The COROT Mission : From Structure of Stars to Origin of Planetary Systems", *ASPC*, **148**, 298.
- [Shack & Platt 1971] Shack P. V. & Platt B. C., 1971, "Production and use of a lenticular Hartmann screen", *J. Opt. Soc. Am.*, **61**, 656.
- [Shannon 1948] Shannon C. E. , 1948, "A mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423 and 623-656
- [Smith & Terrile 1984] Smith B. A. & Terrile R. J., 1984, "A circumstellar disk around Beta Pictoris", *Science*, **226**, 1421-1424.
- [Soummer *et al.* 2002] Soummer R., Aime C. & Falloon P. E. 2002, "Stellar coronagraphy with prolate apodized circular apertures", *A&A*, **397**, 1161.
- [Soummer *et al.* 2003] Soummer R., Dohlen K. & Aime C. 2003, "Achromatic Dual-Zone Phase Mask Stellar Coronagraph", *A&A*, **403**, 369.
- [Tallon & Tallon Bosc 1992] Tallon M., & Tallon-Bosc I. 1992, "The object-image relationship in Michelson stellar interferometry", *A&A*, **253**, 641-645.
- [TPF target stars] "List of proposed TPF target stars", <http://planetquest.jpl.nasa.gov/Navigator/library/basdtp.pdf>
- [Traub 1986] Traub W. A. 1986, "Combining beams from separate telescopes" *Appl. Optics*, **25**, 528-532.
- [Traub & Vanderbei 2003] Traub W. A. & Vanderbei R. J., 2003, "Two mirror apodization for high-contrast imaging", *ApJ*, **499**, 695.
- [Weigelt 1977] Weigelt G. P., 1977, "Modified astronomical speckle interferometry", *Opt. Commun.*, **21**, 55-59.
- [Wynne 1979] Wynne C. G., 1979, "Extending the bandwidth of speckle interferometry", *Opt. Commun.*, **28**, 21.
- [Zernike 1934] Zernike F., 1934, "Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method", *MNRAS*, **94**, 377-384.